IKKI UCHI ERKIN MUNTAZAM STERJENNING XUSUSIY TEBRANISH CHASTOTALARINI ANALITIK VA CHEKLI ELEMENTLAR USULI YORDAMIDA TAQQOSLASH

Egamqulov Abror Bekmirza o‘g‘li
Samarqand davlat texnika universiteti
abroregamqulov298@gmail.com

Annotatsiya. *Bu ishda ikki uchi erkin bo‘lgan bir jinsli, o’zgarmas kesimli sterjenning xususiy tebranish chastotalarini analitik va sonli usullar yordamida aniqlash hamda olingan natiyjalarni taqqoslash masalasi qaralgan. Sterjenning erkinegilish erkin egilish chastotalari chekli elementlar usuli asosida modellashtirib hisoblashlar MATLAB da amalga oshiriladi. Umimiy matritsalardan xususiy qiymatlar masalasi yechildi va dastlabki sakkista deformatsiya tebranish tartibiga mos xususiy chastotalar aniqlandi. MATLAB da olingan antiyjalar analitik hisoblashlar natijalari bilan taqqoslandi. Natiyjalar orasidagi farq juda kichik bo‘lib sakkizinchi tebranishda maksimal xatoli 0.0055708 % ni tashkil etdi. Olingan natiyjalar chekli elementlar usulining muntazam sterjenlarni xususiy tebranish tebranishlar chastotalarini aniqlashdagi aniqligini baholashga imkon beradi.*

Kalit so‘zlar: *Bir jinsli sterjen, xususiy chastota, erkin tebranish, egilish tebranishi, analitik usul, chekli elementlar usuli, MATLAB, tebranish shakli.*

Аннотация. *В данной работе рассматривается задача определения собственных частот колебаний однородного стержня со свободными концами аналитическим и численным методами, а также сравнения полученных результатов. Свободные изгибные колебания стержня моделируются и рассчитываются с использованием метода конечных элементов в программной среде MATLAB. На основе глобальных матриц системы решается задача на собственные значения, и определяются собственные частоты, соответствующие первым восьми формам колебаний. Результаты, полученные в MATLAB, сравниваются с результатами аналитических расчетов. Разница между полученными результатами оказалась незначительной: максимальная погрешность для восьмой формы колебаний составила 0,0055708 %. Полученные результаты позволяют оценить точность метода конечных элементов при определении собственных частот свободных изгибных колебаний однородных стержней.*

Ключевые слова: *Регулярный стержень, собственная частота, свободные колебания, изгибные колебания, аналитический метод, метод конечных элементов, MATLAB, порядок колебаний.*

Abstract. *This study considers the determination of the natural frequencies of a uniform beam with free end using analytical and numerical methods, as well as a comparison of the obtained results. The free bending vibrations of the beam are modeled and analyzed using the finite element method in the MATLAB environment. The eigenvalue problem is formulated and solved based on the global system matrices, and the natural frequencies corresponding to the first eight mode shapes are determined. The results obtained in MATLAB are compared with those from analytical calculations. The difference between the results is very small, with the maximum error for the eighth mode being 0.0055708%. The obtained results make it possible to evaluate the accuracy of the finite element method in determining the natural frequencies of free bending vibrations of uniform beams.*

Keywords: *Uniform beam, natural frequency, free vibration, bending vibration, analytical method, finite element method, MATLAB, vibration order.*

Kirish. Konstruksiyalarda xususiy tebranish chastotalarini aniqlash, ularning dinamik xususiyatlarini o‘rganish muhim masalalardan biri hisoblanadi. Xususiy chastota konstruksiyaning tashqi dinamik ta’sirlarga javobini baholash va rezonans holatlarini tahlil qilishda qo‘llaniladi.

Muntazam va bir jinsli sterjenlar uchun xususiy chastotalarni analitik usul yordamida aniqlash mumkin. Biroq konstruksiya shakli murakkablashganda yoki chegaraviy shartlar o‘zgarganda analitik yechimni olish qiyinlashadi. Bunday hollarda chekli elementlar usuli samarali sonli usullardan biri hisoblanadi.

Chekli elementlar usulida konstruksiya kichik elementlarga ajratiladi. Har bir elementning mexanik xususiyatlari matematik matritsalar yordamida ifodalanadi.

Bu ishning maqsadi ikki uchi erkin bo‘lgan muntazam sterjenning xususiy tebranish chastotalarini analitik usul va chekli elementlar usuli yordamida aniqlash hamda olingan natijalarni sakkizta tebranish tartibi bo‘yicha taqqoslashdan iborat.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili

Konstruksiyalarning tebranishlarini nazariy jihatdan o‘rganish bo‘yicha fundamental tadqiqotlar Timoshenko, Young va Weaverlarning ishlarida keltirilgan bo‘lib, ularda sterjen va konstruksiyalarning tebranish masalalari, xususiy chastotalar hamda chegaraviy shartlarning ta’siri batafsil yoritilgan [1].

Mexanik tebranishlar nazariyasi bo‘yicha Rao ishida erkin va majburiy tebranishlar, xususiy chastotalar hamda xususiy tebranish shakllarini aniqlashning

matematik asoslari keltirilgan [2]. Inman tomonidan olib borilgan tadqiqotlarda esa muhandislik konstruksiyalarining tebranishlarini modellashtirish va ularning dinamik xususiyatlarini aniqlash masalalariga e'tibor qaratilgan [3].

Meirovitch ishlarida tebranish tizimlarining matematik modellari, xususiy qiymatlar masalasi va modalar tahlili nazariy jihatdan ko'rib chiqilgan [4]. Craig va Kurdila tomonidan konstruktiv tizimlarning dinamikasi va modal tahlili bo'yicha matematik yondashuvlar ishlab chiqilgan [9].

Chekli elementlar usulining konstruksiyalar dinamikasidagi qo'llanilishi Clough va Penzien, Bathe, Cook va hammualliflarining ishlarida keng yoritilgan [5–7]. Ushbu tadqiqotlarda global bikrlik va massa matritsalarini shakllantirish, xususiy qiymatlar masalasini yechish hamda konstruksiyalarning tebranish shakllarini aniqlash usullari bayon qilingan.

Rao chekli elementlar usulining muhandislik masalalaridagi qo'llanilishini batafsil yoritib, sonli modellashtirishning aniqligi konstruksiyani diskretlashtirish darajasiga bog'liqligini ko'rsatadi [8]. Hutton va Logan ishlarida ham chekli elementlar modelini shakllantirish va natijalarning aniqligini baholash masalalariga katta e'tibor berilgan [10; 11].

Tadqiqot obyekti va hisoblashlar.

Tadqiqot obyekti sifatida bir jinsli, to'g'ri to'rtburchak kesimli va ikki uchi erkin bo'lgan muntazam sterjen qaraladi.

Hisoblash uchun quyidagi parametrlar qabul qilindi:

$$L=3\ \text{m}$$

$$b=h=0{,}2\ \text{m}$$

$$E=30\cdot10^{9}\ \text{Pa}$$

$$\rho = 2500\ kg/m^3$$

Bu yerda:

- L - sterjen uzunligi;
- b va h - kesim o'lchamlari;
- E - elastiklik moduli;
- ρ - material zichligi.

Sterjenning ko'ndalang kesim yuzasi:

$$A=b\cdot h$$

Berilgan qiymatlarni qo'yib:

$$A=0.2\cdot0.2=0.04\ \text{m}^2$$

To'g'ri to'rtburchak kesimlar uchun inertsiya momenti:

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Hisoblashlar natijasida:

$$I = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}2^3}{12}$$

$$I = 1{,}3333 \cdot 10^{-4}\ m^4$$

Sterjenning ikkala uchini ham erkin deb qabul qilamiz. Erkin uchlardagi chegaraviy shartlar quyidagicha bo'ladi.

$$M(0)=M(L)=0$$

$$Q(0)=Q(L)=0$$

Matematik modeli.

Sterjenning erkin tebranish tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0$$

Bu yerda:

[M] - massa matritsasi;

[K] - bikrlik matritsasi;

{q} - sterjenning ko'chish va burilishlarini ifodalovchi vektor.

Garmonik tebranishni quyidagicha qabul qilamiz:

$$\{q\}=\{\varphi\}\sin(\omega t)$$

Ushbu ifodani harakat tenglamasiga qo'yish natijasida xususiy qiymatlar masalasini hosil qilamiz:

$$[K]\{\varphi\}=\omega^2[M]\{\varphi\}$$

Bu yerda:

ω - doiraviy xususiy chastota;

{φ} - xususiy tebranish shakli.

Doiraviy xususiy chastotadan oddiy chastotaga o'tish formulasi:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}$$

Bu yerda

f - xususiy chastota, Hz.

Analitik usul yordamida xususiy chastotalarni aniqlash.

Ikkala uchi erkin bo'lgan bir jinsli sterjenning egilish tebranishlari uchun xususiy chastota quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Bu yerda:

- F_n - n-tartibli xususiy chastota;

- λ_n n-tartibga mos koeffitsient;
- E - elastiklik moduli;
- I - inertsiya momenti;
- ρ - zichlik;
- A - kesim yuzasi;
- L - sterjen uzunligi.

Ikki uchi erkin sterjenda ikkita qattiq jism harakati mavjud bo‘lib, ular nazariy jihatdan nol chastotaga ega. Ushbu tadqiqotda deformatsion tebranishlar uchun sakkizta tebranish tartibi ko‘rib chiqildi.

Foydalanilgan koeffitsientlarning son qiymatlari:

T/r	λ_n	T/r	λ_n
1	4.7300407	5	17.2787597
2	7.8532046	6	20.4203523
3	10.9956078	7	23.5619449
4	14.1371655	8	26.7035376

1-jadval

Masalan, birinchi tartibli tebranish uchun

$$f_1 = \frac{4{,}7300407^2}{2\pi 3^2}\sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \cdot 1{,}3333 \cdot 10^{-4}}{2500 \cdot 0{,}04}}$$

Natijada:

$$f_1 \approx 79{,}129 \text{ Hz}$$

olinadi.

Analitik xususiy chastotalar

T/r	Analitik, HZ	T/r	Analitik, HZ
1	79.129	5	1055.9
2	218.12	6	1474.8
3	427.61	7	1963.5
4	706.86	8	2522.0

2-jadval.

Chekli elementlar usuli yordamida hisoblash

Sonli hisoblashlar jarayonida sterjen 50 ta teng chekli elementga ajratildi. Har bir element uchun bikrlik va massa matritsalari shakllantirildi. Har bir element ikki tugunga ega bo’lib, har bir tugunda ikkita erkinlik darajasi ko’ndalangqabul qilinadi.

Bu yerda har bir element uchun

$$\{q_e\} = \{w_1\ \theta_1\ w_2\ \theta_2\}^T$$

ko’rinishida yoziladi.

Elementlarning matritsalari birlashtirilib, sterjenning umumiy global bikrlik va massa matritsalari hosil qilindi.

MATLAB muhitida quyidagi xususiy qiymatlar masalasi yechildi:

$$[K]\{\varphi\}=\omega^2[M]\{\varphi\}$$

Natijada har bir tebranish tartibi uchun xususiy chastota va unga mos tebranish shakli aniqlandi.

Ikki uchi erkin sterjenda mavjud bo‘lgan qattiq jism harakatlariga mos nolga yaqin chastotalar deformatsion tebranishlardan ajratildi. Shundan so‘ng sakkizta deformatsion tebranish tartibi analitik natijalar bilan taqqoslandi.

Analitik va MATLAB yordamida olingan natijalar 2-jadvalda keltirilgan.

Analitik va MATLAB natijalarini taqqoslash natiujalarini keltiramiz.

T/n	Analitik, Hz	MATLAB, Hz	Xatoliklar, %
1	79.129	79.129	0.0000055935
2	218.12	218.12	0.000042157
3	427.61	427.61	0.0001618
4	706.86	706.86	0.00044142
5	1055.9	1055.9	0.00098324
6	1474.8	1474.8	0.0019141
7	1963.5	1963.6	0.0033851
8	2522.0	2522.1	0.0055708

3-jadval.

Analitik va MATLAB natijalari orasidagi nisbiy xatolik quyidagi formula orqali hisoblandi:

$$\varepsilon = \left[\frac{f_{MAT} - f_{anal}}{f_{anal}}\right] \cdot 100\%$$

Sakkizinchi tebranish tartibi uchun:

$$f_{anal} = 2522{,}0\ Hz$$
$$f_{MAT} = 2522{,}1\ Hz$$

Shuning uchun:

$$\varepsilon = \left[\frac{2522{,}1 - 2522{,}0}{2522{,}0}\right] \cdot 100\%$$

Natijalardan ko‘rinadiki, MATLAB qiymatlari analitik natijalarga juda yaqin.

Birinchi tebranish tartibida xatolik 0.0000055935 %, sakkizinchi tebranish tartibida esa 0.0055708 % ni tashkil etdi.

Tebranish tartibi oshishi bilan xatolikning asta-sekin ortishi kuzatildi. Shunga qaramay, sakkizinchi tebranish tartibida ham xatolik 0.01 % dan kichik bo‘lib qoldi.

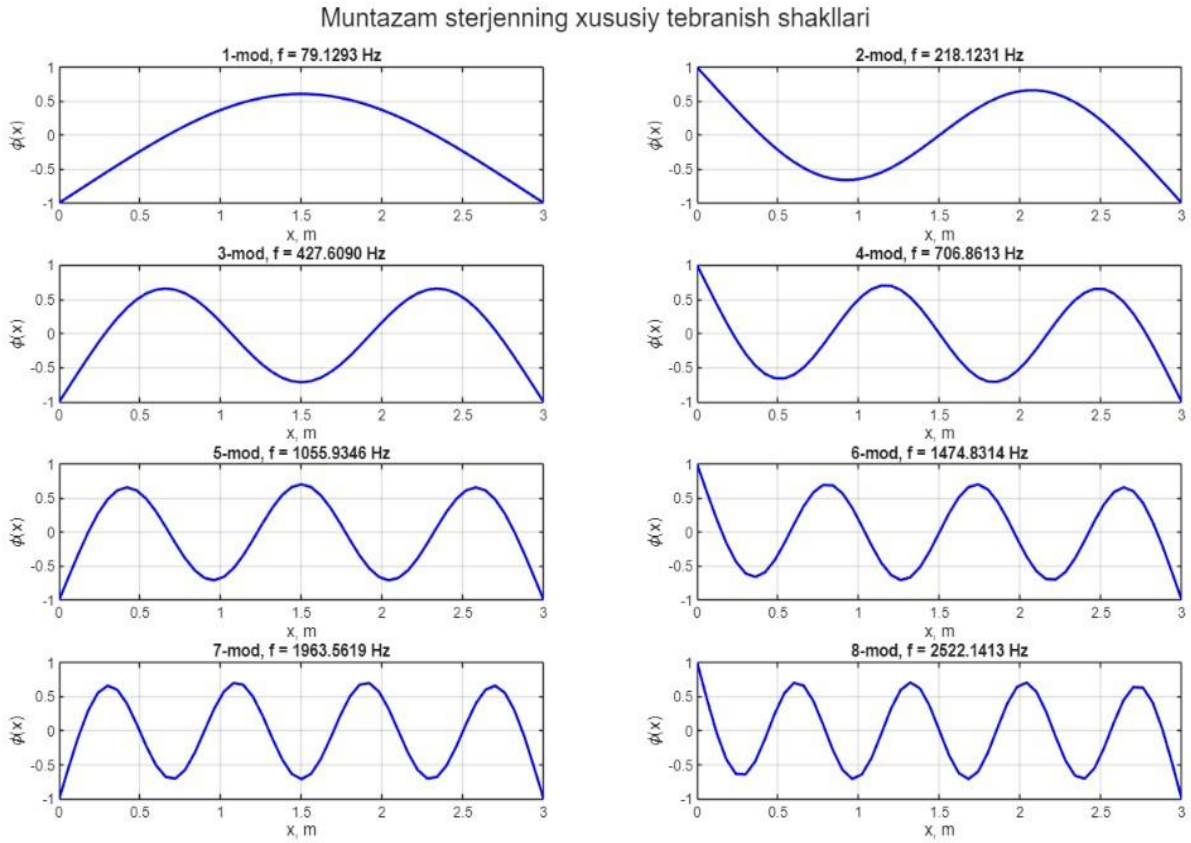
Xususiy tebranish shakllari

MATLAB hisoblashlari orqali xususiy chastotalar bilan bir qatorda ularga mos tebranish shakllari ham aniqlandi.

Muntazam sterjenning dastlabki sakkizta xususiy tebranish shakllari.

Birinchi tebranish tartibida sterjenning deformatsiyasi nisbatan sodda ko‘rinishga ega bo‘ladi. Tebranish tartibi oshishi bilan tebranish shakli murakkablashadi va tugun nuqtalari soni ortadi.

Yuqori tartibli tebranishlarda sterjenning turli qismlari qarama-qarshi yo‘nalishlarda harakatlanishi kuzatiladi.



1-rasm

Grafik natijalar (1-rasm)

Analitik va MATLAB natijalarini grafik ko‘rinishda taqqoslash uchun tebranish tartibiga bog‘liq xususiy chastotalar grafigi qurildi.

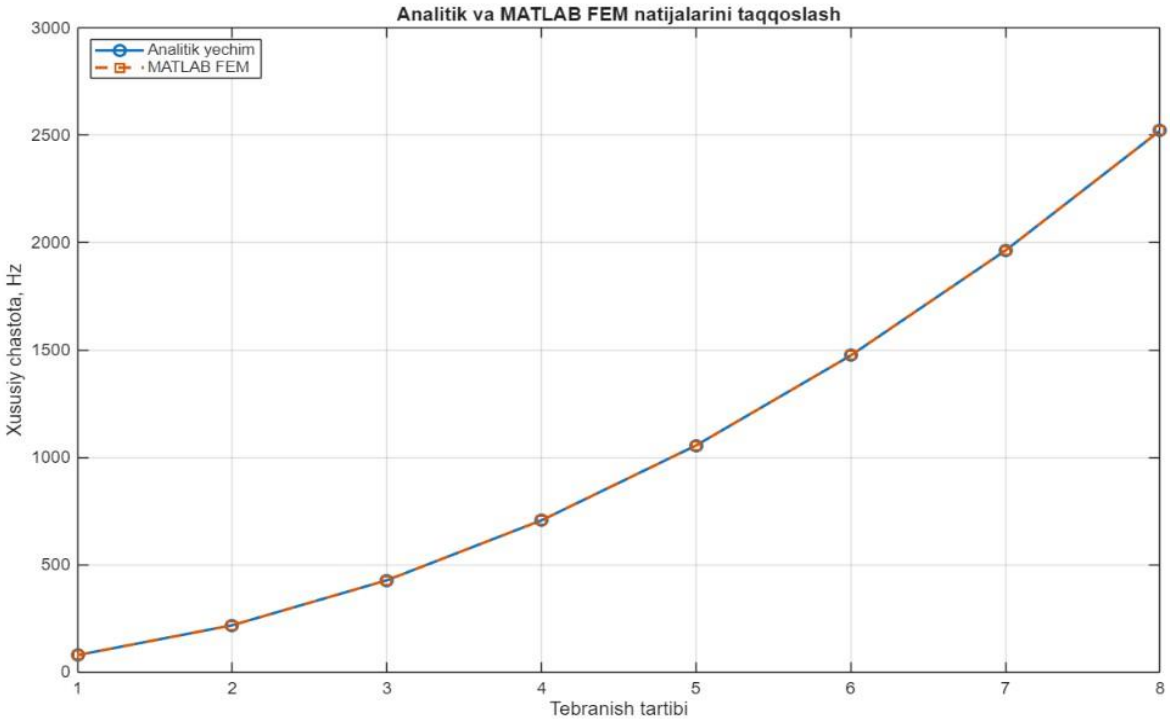
Analitik va MATLAB yordamida aniqlangan xususiy chastotalarni taqqoslash (2-rasm)

Grafikda analitik natijalar va MATLAB natijalari ikki xil rangda tasvirlanadi. Analitik va sonli qiymatlarning bir-biriga juda yaqin joylashishi ikki usul yordamida olingan natijalarning mosligini ko‘rsatadi.

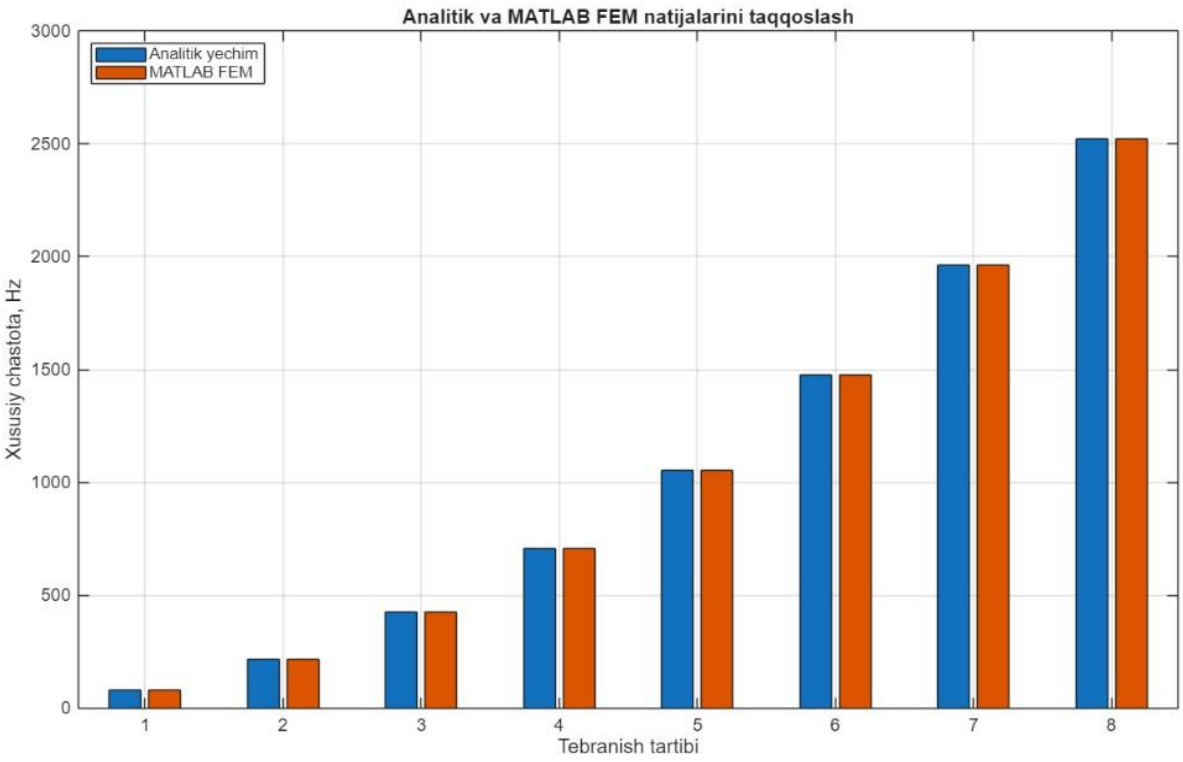
Xatoliklarning tebranish tartibiga bog‘liq o‘zgarishini ko‘rsatish uchun alohida grafik qurildi.

Analitik va MATLAB natijalari orasidagi xatolikning o‘zgarishi (3-rasm)

Grafikdan ko‘rinadiki, tebranish tartibi oshishi bilan xatolik asta-sekin ortadi. Shunga qaramay, sakkizinchi tebranish tartibida ham maksimal xatolik **0.0055708 %** ni tashkil etadi.



2-rasm



3-rasm

Xulosa. Ushbu ishda ikki uchi erkin bo‘lgan muntazam sterjenning xususiy tebranish chastotalari analitik va chekli elementlar usullari yordamida aniqlandi va taqqoslandi.

Hisoblash uchun uzunligi 3 m, kesim o‘lchamlari 0.2·0.2 m, elastiklik moduli $30 \cdot 10^9$ Pa va zichligi 2500 kg/m³ bo‘lgan sterjen qabul qilindi.

Sterjen 50 ta chekli elementga ajratilib, har bir element uchun bikrlik va massa matritsalari shakllantirildi. MATLAB muhitida xususiy qiymatlar masalasi yechildi.

Tadqiqot davomida sakkizta deformatsion tebranish tartibi ko‘rib chiqildi. Analitik va MATLAB natijalari o‘zaro taqqoslandi.

Analitik hisoblashda xususiy chastotalar 79.129 Hz, 218.12 Hz, 427.61 Hz, 706.86 Hz, 1055.9 Hz, 1474.8 Hz, 1963.5 Hz va 2522.0 Hz qiymatlarni tashkil etdi.

MATLAB hisoblashlarida mos ravishda 79.129 Hz, 218.12 Hz, 427.61 Hz, 706.86 Hz, 1055.9 Hz, 1474.8 Hz, 1963.6 Hz va 2522.1 Hz qiymatlar olindi.

Natijalarni taqqoslashda eng kichik xatolik birinchi tebranish tartibida 0.0000055935 %, eng katta xatolik esa sakkizinchi tebranish tartibida 0.0055708 % bo‘ldi.

Shunday qilib, barcha sakkizta tebranish tartibi bo‘yicha analitik va MATLAB natijalari orasidagi farq 0.01 % dan kichik ekanligi aniqlandi.

Olingan natijalar muntazam sterjenning xususiy tebranish chastotalarini aniqlashda chekli elementlar usulidan foydalanish imkoniyatini ko‘rsatadi. Analitik va sonli natijalarning o‘zaro yaqinligi MATLAB asosida ishlab chiqilgan FEM modelining ushbu hisoblash masalasida yuqori aniqlikda ishlashini ko‘rsatdi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration Problems in Engineering. McGraw-Hill, 1974.
2. Rao S. S. Mechanical Vibrations. Pearson, 2017.
Inman D. J. Engineering Vibration. Pearson, 2014.
3. Meirovitch L. Elements of Vibration Analysis. McGraw-Hill, 1986.
Clough R. W., Penzien J. Dynamics of Structures. McGraw-Hill, 1993.
4. Bathe K. J. Finite Element Procedures. Prentice Hall, 1996.
5. Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., Witt R. J. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. Wiley, 2001.
6. Rao S. S. The Finite Element Method in Engineering. Butterworth-Heinemann, 2017.
7. Craig R. R., Kurdila A. J. Fundamentals of Structural Dynamics. Wiley, 2006.

8. Hutton D. V. Fundamentals of Finite Element Analysis. McGraw-Hill, 2004.

9. Logan D. L. A First Course in the Finite Element Method. Cengage Learning, 2012.

10. Géradin M., Rixen D. J. Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics. Wiley, 2015.

11. Lenci S., Clementi F. Natural frequencies and internal resonance of beams with arbitrarily distributed axial loads. Journal of Applied and

12. Computational Mechanics, 2021, Vol. 7, Special Issue, pp. 1009–1019. DOI: 10.22055/jacm.2020.32927.2104.