ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рустамов Ш.А.
Самаркандский государственный университет имени Ш. Рашидова
rustamovshaxzod1997@gmail.com

Пусть x точка $(x_1, \dots, x_n)$ пространства R^n, x' проекция $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ этой точки на гиперплоскость $x_n = 0$. Через $C^{k+\lambda}(\overline{D})$ обозначается пространства функций u на D с конечной нормой $|u|^{k+\lambda}(D)$.

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$A = -\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)\ \partial^2/\partial x_j \partial x_k + \sum_{j-1}^{n} a^j(x)\ \partial/\partial x_j + a(x)$$

с коэффициентами a^{jk}, a^j, a класса $C^{\lambda}(R^n)$ удовлетворяющий условию равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k}^{n} a^{jk}(x)\,\xi_j \xi_k \geq \varepsilon_0 |\xi|^2, \qquad \xi \in R^n, \qquad x \in D.$$

Рассмотрим область D' в R^{n-1} с границей D' класса $C^{2+\lambda}$. Пусть

$$D = \{x: x' \in D', \gamma_H(x') < x_n < \gamma_0(x')\},$$

где $\gamma_0, \gamma_H -$ функции класса $C^{2+\lambda}(\overline{D}')$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$\gamma_H < \gamma_0 \quad \text{на} \quad D', \quad \partial\gamma_\tau/\partial x_j = 0 \ \ (\tau = 0, H), \qquad j = 1, \dots, n-1$$

Обозначим через Γ_0 часть ∂D, являющуюся графиком γ_0. Зафиксируем весовую функцию ρ, такую, что

$$0 < \varepsilon_0 < \rho \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \ \ |\rho|^{\lambda}(D) \leq 1/\varepsilon_0.$$

Рассмотрим задачу об отыскании пары функций(u, q) удовлетворяющих условиям:

$$Au = \rho q + f, \qquad q_{x_n} = 0 \quad \text{на} \quad D, \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{на} \quad \partial D, \quad u_{x_n} = h \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{2}$$

Через Cобозначается постоянные, зависящие от D, от $C^{\lambda} -$ норм коэффициентов оператор A, функции ρ и от ε_0.

В теореме 1 предполагается, что коэффициенты a^{jn} при $j \le n-1$ удовлетворяют следующим условиям в угловых точках границы D:

$$a^{jn}(x', \gamma_\tau(x')) = 0 \quad \text{на} \quad \partial D' \quad \text{для} \quad \tau = 0, H.$$

Теорема 1. Существует постоянная C, такая что

$$|u|^{2+\lambda}(D) + |q|^{\lambda}(D') \le$$
$$\le C\left(|f|^{\lambda}(D) + |q|^{2+\lambda}(\partial D) + |h|^{1+\lambda}(\Gamma_0) + |u|^{0}(D)\right)$$

для любых функций $u \in C^{2+\lambda}(\bar{D})$ и $q \in C^{\lambda}(\bar{D})$ являющихся решением задач (1), (2).

Теорема 2. Предположим, что весовая функция ρ удовлетворяет следующим условиям:

$$\rho,\ \partial\rho/\partial x_n \in C(\bar{D}), 0 \le \rho, 0 \le \partial\rho/\partial x_n \quad \text{на} \quad D.$$

Если функции $u \in C^2(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D}),\ q \in C(\bar{D})$ являются решениями задачи

$$Au = \rho q, \qquad \partial q/\partial x_n = 0 \quad \text{на} \quad D,$$
$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial D, \quad \partial u/\partial x_n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0$$

то $u = 0,\ q = 0$ на D.

Оценка теоремы 1 является оценкой шаудеровского типа для задачи (1), (2). Из теоремы 2 можно получить единственность решения задачи (1), (2). Тогда оценки теоремы 1 справедлив без слагаемого $|u|^0(D)$ в правой части.

Рассмотрим задачу определения пары функций (u, q) из условия

$$Au + qu = 0, \qquad q_{x_n} = 0, \qquad q \ge 0 \quad \text{на} \quad D, \tag{3}$$
$$u = q \quad \text{на} \quad \partial D, \qquad u_{x_n} = h \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{4}$$

Теорема 3. При условий теорем 1 и 2 вытекает, что решение задачи (3), (4) единственно и устойчиво.

В работе [1] рассмотрен частный случай задачи (1), (2), где область

$$D = D'x(-H, 0)$$

и получен оценки теоремы 1 и единственность.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Хайдаров. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. № 7, том 3. 1987.