TEOREMA ISBOTINI REKONSTRUKSIYA QILISH ORQALI TALABALARNING MANTIQIY VA REFLEKSIV FIKRLASHINI RIVOJLANTIRISH

Umaraliyeva Diyora Ulug‘bek qizi
Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti
Khaldibekova96@gmail.com

Annotatsiya. *Maqolada teorema isbotini rekonstruksiya qilish — ya'ni uning mantiqiy tuzilishini tiklash, tushirib qoldirilgan asoslarni aniqlash, xatolarni tuzatish va qo'llanilgan strategiyani baholash faoliyati sifatida — orqali talabalarning mantiqiy va refleksiv fikrlashini rivojlantirishning nazariy-metodik asoslari yoritiladi. Ketma-ketlik limitining yagonaligi teoremasi misolida baholash ko'rsatkichlari va qo'llash shartlari bilan olti bosqichli metodika taklif etiladi, uning samaradorligi esa keyingi empirik tekshirishni talab qiladi.*

Kalit so‘zlar: *inson kapitali, teorema isboti, isbotni rekonstruksiya qilish, mantiqiy fikrlash, refleksiv fikrlash, o‘z-o‘ziga izohlash.*

Аннотация. *Статья посвящена теоретико-методическим основам развития логического и рефлексивного мышления студентов через реконструкцию доказательства теоремы, где реконструкция рассматривается как восстановление логической структуры доказательства, выявление пропущенных оснований, исправление ошибок и оценку использованной стратегии. На примере теоремы о единственности предела последовательности предложена шестиэтапная методика с показателями оценки мышления и условиями применения, эффективность которой требует дальнейшей эмпирической проверки.*

Ключевые слова: *человеческий капитал, доказательство теоремы, реконструкция доказательства, логическое мышление, рефлексивное мышление, самообъяснение.*

Abstract. *The article addresses the theoretical and methodological foundations for developing students' logical and reflective thinking through theorem proof reconstruction, where reconstruction is understood as restoring the proof's logical structure, identifying omitted premises, correcting errors, and evaluating the strategy used. Using the theorem on the uniqueness of a sequence limit as an example, a six-*

stage methodology is proposed along with indicators for assessing thinking and conditions for application, the effectiveness of which requires further empirical verification.

Keywords: *human capital, theorem proof, proof reconstruction, logical thinking, reflective thinking, self-explanation.*

Kirish

Inson kapitalini rivojlantirish oliy ta’limning muhim vazifalaridan biridir. Jahon banki inson kapitalini insonlarning hayoti davomida shakllanadigan, ularning jamiyatda samarali faoliyat yuritishiga imkon beradigan bilim, ko‘nikma va salomatlik majmui sifatida tavsiflaydi. Sifatli ta’limga investitsiya kiritish ushbu salohiyatni rivojlantirishning asosiy yo‘nalishlaridan hisoblanadi [1]. Bu nuqtayi nazardan oliy ta’limda talabaning egallagan bilimlari bilan birga ulardan mustaqil foydalanishi, xulosalarining asoslanganligini tekshirishi va yangi vaziyatlarda o‘z faoliyatini tashkil eta olishi ham muhimdir.

Matematik ta’lim bunday imkoniyatlarni shakllantirish uchun mazmunli faoliyat muhitini yaratadi. OECDning kattalar ko‘nikmalariga bag‘ishlangan xalqaro tadqiqotida matematik savodxonlik va o‘zgaruvchan vaziyatlarda muammolarni hal qilish shaxsiy, iqtisodiy hamda ijtimoiy rivojlanish uchun muhim ko‘nikmalar sifatida ko‘rib chiqiladi [2]. Shundan kelib chiqib, matematik tayyorgarlikning inson kapitaliga hissasini miqdoriy axborotni tahlil qilish, dalillarni tekshirish, qarorlarning shartlarini aniqlash va bilimlarni yangi vazifalarda qo‘llash imkoniyatlari orqali o‘rganish maqsadga muvofiq.

Teorema isboti bilan ishlash mazkur imkoniyatlarni rivojlantirishning muhim vositalaridan biridir. Isbot jarayonida talaba shart va xulosani farqlaydi, ta’rif va teoremalarni tanlaydi, mantiqiy o‘tishlarni asoslaydi hamda qarama-qarshiliklarni aniqlaydi. Isbotni tahlil qilish esa o‘z mulohazasining to‘g‘riligini tekshirish, tushunilmagan o‘rinlarni anglash va xatolarni tuzatishni talab qiladi. Ushbu faoliyatlar mantiqiy va refleksiv fikrlashning o‘zaro bog‘liqligini namoyon etadi.

Biroq zarur matematik faktlarni bilish mustaqil isbot tuza olishni har doim ham ta’minlamaydi. K. Weber tadqiqotida talabalarning isbot uchun zarur bilimlarga ega bo‘la turib, qaysi fakt yoki teoremadan qachon foydalanishni tanlashda qiyinchilikka duch kelishi ko‘rsatilgan. Muallif buni strategik bilimlarning ahamiyati bilan izohlaydi [3]. Demak, isbotlashga o‘rgatishda matematik bilimlar bilan birga ularni tanlash va tartibga solish usullarini ham shakllantirish zarur.

Ushbu maqolada teorema isbotini rekonstruksiya qilish tayyor isbotni o‘rganishdan mustaqil dalillashga o‘tishni qo‘llab-quvvatlovchi metodik vosita sifatida taklif etiladi. Uning inson kapitali bilan bog‘liqligi bilimlardan ongli foydalanish, dalillangan qaror qabul qilish va o‘z faoliyatini takomillashtirish imkoniyatlari orqali talqin qilinadi.

Maqolaning maqsadi — teorema isbotini rekonstruksiya qilish orqali talabalarning mantiqiy va refleksiv fikrlashini rivojlantirish metodikasini asoslash hamda uning inson kapitalining intellektual tarkibini rivojlantirishdagi pedagogik imkoniyatlarini ochib berish.

Tadqiqot metodlari va nazariy asoslar

Tadqiqotda ilmiy adabiyotlarning nazariy tahlili, isbotlash faoliyatining mantiqiy-tuzilmaviy tahlili va didaktik modellashtirish metodlaridan foydalanildi. Nazariy tahlilda isbot tuzish, isbotning to‘g‘riligini tekshirish va o‘z-o‘ziga izohlashga oid tadqiqotlar o‘rganildi. Mantiqiy-tuzilmaviy tahlil asosida teorema sharti, xulosa, yordamchi tasdiqlar va isbot qadamlarining bog‘liqligi ajratildi. Didaktik modellashtirish orqali rekonstruksiya topshiriqlari va ularni bajarish bosqichlari ishlab chiqildi.

Maqolada **mantiqiy fikrlash** shartlardan xulosa chiqarish, mulohazalar o‘rtasidagi bog‘liqlikni aniqlash, kvantorlar bilan to‘g‘ri ishlash va har bir qadamni asoslash faoliyati sifatida tushuniladi. **Refleksiv fikrlash** esa talabaning o‘z fikrlash jarayonini tahlil qilishi, tanlagan usulining asoslanganligini baholashi, xatosining sababini aniqlashi va tuzatish yo‘lini belgilashini anglatadi. Bu ta’riflar mazkur metodikada baholanishi lozim bo‘lgan faoliyatlarni aniqlashtiradi.

Isbotni o‘qish va uning yaroqliligini tekshirish alohida o‘quv vazifasidir. A. Selden va J. Seldenning tadqiqoti talabalarning matematik argumentlarni o‘qishi, ular ustida mulohaza yuritishi va argument teoremani isbotlashini baholash jarayoniga bag‘ishlangan [4]. Ushbu tadqiqot yo‘nalishi rekonstruksiya topshiriqlariga dalilning to‘liqligi va mantiqiy muvofiqligini tekshirish talablarini kiritish uchun asos bo‘ladi.

Metodikaning yana bir tayanchi — **o‘z-o‘ziga izohlash** faoliyatidir. M. Hodds, L. Alcock va M. Inglis tadqiqotida o‘z-o‘ziga izohlashga o‘rgatishning isbotni tushunishga ijobiy ta’siri ko‘rsatilgan [5]. A. Renkl va A. Eitel esa izohlashda yechim qadamlari bilan tegishli prinsiplar o‘rtasidagi aloqani ochish, yo‘naltiruvchi savollarni moslashtirish va o‘quv yuklamasini hisobga olish zarurligini ta’kidlaydi [6].

Mazkur natijalar isbotni rekonstruksiya qilishda “Bu qadam nima uchun bajarildi?”, “Qaysi ta’rif qo‘llanildi?”, “Bu xulosaga kelish uchun qanday shart zarur?” kabi savollardan foydalanishni asoslaydi. Shu bilan birga, o‘z-o‘ziga izohlash bo‘yicha

mavjud dalillar maqolada taklif etilayotgan butun metodikaning samaradorligi allaqachon tekshirilganini anglatmaydi.

Asosiy qism

Isbotni rekonstruksiya qilishning mazmuni

Teorema isbotini rekonstruksiya qilish — isbotning mantiqiy tuzilishini berilgan qismlar, tayanch g‘oyalar yoki to‘liq bo‘lmagan matn asosida tiklash, har bir o‘tishni asoslash va hosil bo‘lgan dalilni tekshirish faoliyatidir. Bunda tiklangan isbotning muallif matni bilan so‘zma-so‘z mosligi talab etilmaydi. Asosiy talab — uning matematik to‘g‘riligi, yetarlicha to‘liqligi va talaba tomonidan tushuntirib berilishidir.

Rekonstruksiya topshiriqlarini quyidagi shakllarda tashkil etish mumkin:

Topshiriq shakli	Talabaning faoliyati	Asosiy rivojlantiruvchi vazifa
Isbot qismlarini tartiblash	Aralashtirilgan qadamlarning mantiqiy ketma-ketligini tiklaydi	Qadamlar o‘rtasidagi bog‘liqlikni aniqlash
Tushirib qoldirilgan qadamni to‘ldirish	Yetishmayotgan mulohaza yoki baholashni kiritadi	Mantiqiy bo‘shliqni aniqlash
Asoslarni tiklash	Qadam yoniga ta’rif, teorema yoki xossani yozadi	Dalillashning aniqligi
Xatoli isbotni tuzatish	Noto‘g‘ri o‘tishni topib, sababini tushuntiradi	Tekshirish va refleksiya
Tayanch reja bo‘yicha isbot tuzish	Asosiy g‘oya asosida to‘liq dalil yaratadi	Strategik mustaqillik
Usulni yangi vaziyatga ko‘chirish	O‘rganilgan isbot g‘oyasini boshqa tasdiqda qo‘llaydi	Bilimlarni yangi sharoitda qo‘llash

Murakkablikni oshirishda avval to‘liq qismlarni tartiblash, keyin asoslarni tiklash, undan so‘ng faqat tayanch reja bo‘yicha ishlash tavsiya etiladi. Har bir bosqichda talabadan tanlovini tushuntirish so‘raladi.

Rekonstruksiya qilishning olti bosqichli metodikasi

Birinchi bosqich — teoremani anglash. Talaba obyektlar, shartlar, xulosa va kvantorlarni ajratadi. “Nima berilgan?” va “Nimani isbotlash kerak?” savollariga aniq javob beradi.

Ikkinchi bosqich — tayanch bilimlarni faollashtirish. Isbot uchun zarur ta’riflar, xossalar va avvalgi teoremalar aniqlanadi. Talaba ularning qaysi biri qanday vazifa bajarishini dastlabki tarzda belgilaydi.

Uchinchi bosqich — isbot rejasini tiklash. To‘g‘ridan to‘g‘ri isbotlash, teskarisini faraz qilish yoki boshqa usulning mosligi muhokama qilinadi. Isbotning boshlang‘ich nuqtasi va yakuniy maqsadi o‘rtasidagi asosiy bog‘lanish topiladi.

To‘rtinchi bosqich — qadamlarni tiklash va izohlash. Talaba yetishmayotgan qismlarni to‘ldiradi, tartibni belgilaydi va har bir muhim o‘tishni asoslaydi.

Beshinchi bosqich — tekshirish. Teorema shartlaridan foydalanish, belgilar ma’nosi, kvantorlar tartibi va xulosaning kelib chiqishi tekshiriladi. Juftlikda ishlaganda talabalardan biri dalillaydi, ikkinchisi asos so‘raydi.

Oltinchi bosqich — refleksiya va yangi vazifada qo‘llash. Talaba qiyinchilik tug‘dirgan qadamni, dastlabki xatosini va uni tuzatish usulini yozadi. So‘ng isbotning asosiy g‘oyasidan foydalaniladigan yangi topshiriqni bajaradi.

Matematik analizdan metodik namuna

Teorema. Agar haqiqiy sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning limiti yagona bo‘ladi.

Tayanch bilimlar: ketma-ketlik limiti ta’rifi, modulning xossalari, uchburchak tengsizligi va teskarisini faraz qilib isbotlash usuli.

Talabaga quyidagi to‘liq bo‘lmagan matn beriladi:

Faraz qilaylik, $an \to a \; va \; an \to b,$ bunda a≠b.
ε_____ > 0 deb tanlaymiz.
Limit ta’rifiga ko‘ra shunday N_1 va N_2 mavjudki, ...
N=_____ deb olamiz.
n≥N uchun uchburchak tengsizligidan ... .
Hosil bo‘lgan qarama-qarshilikdan ... .

Rekonstruksiya qilingan isbot quyidagicha bo‘ladi.

Faraz qilaylik, ketma-ketlik ikkita turli aa va bb limitga ega. U holda |a−b|>0|a-b|>0. Quyidagini tanlaymiz:

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}.$$

$a_n \to a$ bo‘lganligi sababli shunday N_1 mavjudki, barcha $n \geq N_1$ uchun

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Xuddi shuningdek, $a_n \to b$ dan shunday N_2 mavjudki, barcha $n \geq N_2$ uchun

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

Endi $N = \max\{N_1, N_2\}$ deb olamiz. Barcha $n \geq N$ uchun ikkala tengsizlik bir vaqtda bajariladi. Uchburchak tengsizligiga ko‘ra,

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|.$$

Musbat son o‘zining uchdan ikki qismidan kichik bo‘la olmaydi. Demak, $a \neq b$ faraz noto‘g‘ri va $a = b$. Teorema isbotlandi.

Mazkur isbotdan keyin talabalarga quyidagi savollar beriladi:

1. a≠ba\ne b farazi isbotning qaysi qadamida zarur bo‘ldi?
2. Nima uchun $N = \max\{N_1, N_2\}$ tanlandi? Minimum tanlansa, qanday muammo yuzaga keladi?
3. $\varepsilon = |a - b|/2$ deb olish mumkinmi? Javobingizni tengsizliklar orqali asoslang.
4. ε=|a−b|\varepsilon=|a-b| tanlanganda nima uchun shu baholash orqali qarama-qarshilik olinmaydi?
5. Isbotning qaysi qadami siz uchun eng qiyin bo‘ldi va uni qanday tushundingiz?

Uchinchi savolga javoban talaba $|a - b| < 2\varepsilon = |a - b|$ qarama-qarshiligi hosil bo‘lishini ko‘rsatadi. Bu topshiriq ε tanlovining matematik sababini tushunishga xizmat qiladi.

Keyingi topshiriqda “Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan” teoremasining isbotini tiklash taklif etiladi. Talaba limit ta’rifi yordamida ketma-ketlikning yetarlicha katta indeksli hadlarini baholaydi, so‘ng dastlabki chekli sondagi hadlarni ham hisobga oladi. Shu tariqa avvalgi bilim yangi isbot tuzilishida qo‘llanadi.

Mantiqiy va refleksiv fikrlashni baholash

Baholashda tayyor javob bilan birga talabaning yozma asoslari, tuzatishlari va refleksiv izohlari hisobga olinadi.

Mezon	Kuzatiladigan ko‘rsatkich
Mantiqiy aniqlik	Shart, xulosa va kvantorlarni to‘g‘ri ajratadi
Dalillashning to‘liqligi	Har bir muhim o‘tishga tegishli asos keltiradi
Strategik tushunish	Isbot usuli va yordamchi tanlovlar sababini izohlaydi
O‘zini tekshirish	Asossiz o‘tish yoki xatoni mustaqil aniqlaydi
Refleksiv tahlil	Xatoning sababini va tuzatish yo‘lini tushuntiradi
Yangi vaziyatda qo‘llash	O‘rganilgan g‘oyani boshqa isbotga moslashtiradi

Har bir ko‘rsatkichni 0–2 ball bilan baholash mumkin: 0 ball — bajarilmagan yoki noto‘g‘ri; 1 ball — qisman bajarilgan yoxud yo‘naltiruvchi yordam bilan asoslangan; 2 ball — mustaqil va to‘g‘ri bajarilgan. Ushbu rubrika mualliflik taklifi bo‘lib, tadqiqotda qo‘llashdan oldin ekspert bahosi va dastlabki sinov orqali aniqlashtirilishi kerak.

Refleksiv javobning mazmuni alohida ahamiyatga ega. Masalan, “Men isbotni tushundim” jumlasi tushunish jarayonini ochib bermaydi. “Dastlab NN uchun

minimumni tanladim; ikkala tengsizlik bir vaqtda bajarilishi kerakligini tekshirgach, maksimumni olish zarurligini angladim" jumlasi esa o‘z xatosini tahlil qilish va tuzatish faoliyatini ko‘rsatadi.

Muhokama: inson kapitali bilan bog‘liqlik

Taklif etilgan metodikaning inson kapitaliga aloqasi uch yo‘nalishda izohlanadi.

Birinchidan, rekonstruksiya jarayonida talaba matematik bilimlarini muayyan maqsadga muvofiq tanlashni mashq qiladi. Bu strategik bilimlarning rivojlanishi bilan bog‘liq bo‘lib, zarur faktni bilishdan uni o‘rinli qo‘llashga o‘tishni qo‘llab-quvvatlaydi [3].

Ikkinchidan, dalillarni tekshirish va xatolarni tuzatish talabaning o‘z faoliyatini nazorat qilishiga yo‘naltiriladi. Isbotdagi xulosaning qaysi shartlarga bog‘liqligini aniqlash kasbiy vaziyatlarda model, hisoblash yoki qarorning asoslarini tekshirishga o‘rgatish uchun metodik imkoniyat yaratadi.

Uchinchidan, o‘z mulohazasini izohlash va boshqalarning savollariga javob berish bilimlarni hamkorlikda muhokama qilishga xizmat qiladi. Bu faoliyatni rivojlantirish uchun izohlar aniq matematik prinsiplar bilan bog‘lanishi lozim [5; 6].

Mazkur imkoniyatlarning boshqa kasbiy vaziyatlarga ko‘chishi avtomatik jarayon sifatida qaralmaydi. Buning uchun matematika mashg‘ulotlarida o‘rganilgan tekshirish usullarini kasbiy topshiriqlar bilan bog‘lash zarur. Masalan, texnika yo‘nalishida hisoblash formulasining qo‘llanish shartlarini, iqtisod yo‘nalishida model farazlarini, pedagogik yo‘nalishda o‘quvchi yechimining asoslanganligini tahlil qilish topshiriqlari berilishi mumkin.

Metodikaning samaradorligini tekshirishda dastlabki va yakuniy topshiriqlar bilan birga talaba ilgari uchratmagan isbot, kechiktirilgan nazorat va yozma refleksiya materiallaridan foydalanish maqsadga muvofiq. Inson kapitali bilan bog‘liqlik esa ushbu maqolada pedagogik talqin darajasida asoslanadi; iqtisodiy samaradorlikka doir bevosita xulosa chiqarilmaydi.

Xulosa

Teorema isbotini rekonstruksiya qilish talabaning matematik bilimlarini mantiqiy bog‘lanishlar orqali tashkil etish, isbot strategiyasini anglash va o‘z faoliyatini tekshirishiga yo‘naltirilgan metodik vositadir. Uning rivojlantiruvchi imkoniyati isbot qismlarini tiklashni qadamlarni asoslash, xatolarni tahlil qilish va refleksiv izohlash bilan birlashtirishda namoyon bo‘ladi.

Taklif etilgan olti bosqichli metodika teoremani anglash, tayanch bilimlarni faollashtirish, isbot rejasini tiklash, qadamlarni asoslash, tekshirish va yangi vaziyatda qo‘llashni qamrab oladi. Uni amalga oshirishda yordam hajmini talabalarning

tayyorgarligiga moslashtirish hamda mustaqillik ortishi bilan kamaytirib borish tavsiya etiladi.

Inson kapitali nuqtayi nazaridan ushbu yondashuvning ahamiyati bilimlardan ongli foydalanish, dalillangan mulohaza yuritish va o‘z fikrlashini takomillashtirish imkoniyatlarini rivojlantirish bilan belgilanadi. Mazkur imkoniyatlarning amaldagi natijalarini aniqlash keyingi pedagogik tajriba-sinovning vazifasidir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. World Bank. The Human Capital Project: Frequently Asked Questions [Elektron resurs]. – URL: World Bank (murojaat sanasi: 12.09.2026).
2. OECD. Do Adults Have the Skills They Need to Thrive in a Changing World?: Survey of Adult Skills 2023. – Paris : OECD Publishing, 2024. – 199 p. – DOI: 10.1787/b263dc5d-en.
3. Weber K. Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge // Educational Studies in Mathematics. – 2001. – Vol. 48, № 1. – P. 101–119. – DOI: 10.1023/A:1015535614355.
4. Selden A., Selden J. Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? // Journal for Research in Mathematics Education. – 2003. – Vol. 34, № 1. – P. 4–36. – DOI: 10.2307/30034698.
5. Hodds M., Alcock L., Inglis M. Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension // Journal for Research in Mathematics Education. – 2014. – Vol. 45, № 1. – P. 62–101. – DOI: 10.5951/jresematheduc.45.1.0062.
6. Renkl A., Eitel A. Self-Explaining: Learning About Principles and Their Application // The Cambridge Handbook of Cognition and Education / ed. by J. Dunlosky, K. A. Rawson. – Cambridge : Cambridge University Press, 2019. – P. 528–549. – DOI: 10.1017/9781108235631.022.