МЕТОДИКА ТРАНСФОРМАЦИИ ТРАДИЦИОННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ДИСКУРСИВНЫЕ ЗАДАНИЯ: НА ПРИМЕРЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Асанова Нургиса Рискелди кизи

Национальный педагогический унивеситет Узбекистан им. Низами

Аннотация. *Цель статьи – разработать компактную методику преобразования традиционных математических задач в дискурсивные задания и обосновать структуру банка таких заданий для курса математического анализа.*

Ключевые слова: *математический дискурс; дискурсивное задание; математическая задача; математический анализ; проектирование заданий; аргументация; семиотические репрезентации.*

Abstract. *The purpose of this article is to develop a compact methodology for transforming traditional mathematical problems into discursive tasks and to substantiate the structure of a bank of such tasks for a course in mathematical analysis.*

Keywords: *mathematical discourse; discursive task; mathematical problem; mathematical analysis; task design; argumentation; semiotic representations.*

Annotatsiya. *Maqolaning maqsadi an’anaviy matematik masalalarni diskursiv topshiriqlarga aylantirishning ixcham metodikasini ishlab chiqish va matematik tahlil kursi uchun bunday topshiriqlar bankining tuzilishini asoslashdan iborat.*

Kalit so‘zlar: *matematik diskurs; diskursiv topshiriq; matematik masala; matematik tahlil; topshiriqlarni loyihalash; argumentatsiya; semiotik reprezentatsiyalar.*

Введение. Задача является базовой единицей обучения математике: через нее осваиваются понятия, способы действий, теоремы, методы доказательства и

приложения. Однако типичная формулировка «найдите», «вычислите», «решите» преимущественно выводит во внешнюю форму результат и процедуру, оставляя скрытыми основания выбора метода, смысл понятий, логические связи, переходы между представлениями и рефлексию. Процедурная практика необходима, но сама по себе не обеспечивает развития математического дискурса.

В подходе А. Сфард математическое обучение связывается с изменением способов участия в специфическом математическом дискурсе; математическое мышление рассматривается как форма коммуникации [1; 2]. Поэтому студент должен не только получить ответ, но и корректно использовать термины, объяснять смысл, обосновывать выводы, анализировать чужие рассуждения и перестраивать собственное объяснение. Рюве подчеркивает необходимость четкого определения дискурса и явной фиксации математической стороны коммуникации [3].

Семиотическая теория Дюваля показывает, что понимание математики связано не только с преобразованиями внутри одного регистра, но и с переходами между символической, графической, табличной и вербальной формами [4]. Исследования доказательства и доказывания дополняют эту картину действиями выдвижения, проверки, опровержения и пересмотра аргументов [5]. В задачном подходе Смит и Стайн связывают качество задания с характером математического мышления, которое оно способно вызвать [7; 8], а Пауэлл и Алкахтани показывают, что специальный дизайн задания может поддерживать продуктивный математический дискурс в совместной среде [9].

В русскоязычной традиции С. Р. Мугаллимова рассматривает математическую задачу как ядро педагогического дискурса и подчеркивает ситуативность ее типа: одно и то же задание может быть упражнением или проблемной задачей в зависимости от опыта решающего и контекста [10; 11]. Для подготовки будущего учителя дискурсивная компетенция связывается со способностью понимать, интерпретировать и порождать математические тексты [12]. Однако остается недостаточно операционализированным вопрос: как системно преобразовывать уже существующие задачи из традиционных сборников в дискурсивные, сохраняя их математическое ядро и не создавая избыточной нагрузки.

Цель исследования – разработать методику такой трансформации и структуру банка дискурсивных заданий для курса математического анализа. Исследовательские вопросы: какие элементы задачи остаются инвариантными; какие операторы задают требуемые дискурсивные действия; как различать уровни дискурсивной насыщенности; какие метаданные необходимы для формирования управляемого банка.

Материалы и методы. Исследование имеет теоретико-методический, проектно-ориентированный характер. Использованы концептуальный и категориальный анализ, сравнительный анализ исходных и преобразованных формулировок и дидактическое моделирование. Эмпирическая эффективность модели в данной работе не оценивается.

Исходным корпусом послужил сборник О. Тошметова и Р. М. Тургунбаева по математическому анализу [13]. Единицей анализа выступала отдельная задача. Для прототипа банка целенаправленно отобраны 37 задач: 6 по теме «Функция», 6 – «Предел», 6 – «Непрерывность», 6 – «Производная», 6 – «Интеграл», 7 – «Ряды». Отбор обеспечивал разнообразие математических действий и наличие потенциала для объяснения, обоснования, координации репрезентаций, анализа ошибки или защиты решения.

Для проектирования выделены шесть аналитических компонентов: T – терминологический, S – семантический, L – логико-аргументативный, Si – семиотический, K – коммуникативный, R – рефлексивный. Компоненты не являются взаимно исключающими; кодирование используется как средство постановки цели задания и последующего оценивания.

Таблица 1. Операторы T–S–L–Si–K–R

Код / компонент	Функция в задании	Типовые формулировки
T – терминологический	точность терминов, условий и символов	определите; назовите условие; различите понятия
S – семантический	раскрытие математического смысла	объясните смысл; интерпретируйте; приведите пример/контрпример
L – логико-аргументативный	обоснование переходов и выводов	почему?; обоснуйте; докажите; опровергните

Код / компонент	Функция в задании	Типовые формулировки
Si – семиотический	связь регистров представления	представьте графически; переведите формулу в словесное описание
K – коммуникативный	предъявление и обсуждение рассуждения	защитите решение; объясните партнеру; сравните решения
R – рефлексивный	оценка и пересмотр решения	найдите ошибку; что изменили и почему?; оцените ограничения метода

Дискурсивная насыщенность задается шкалой D0–D3: D0 – процедурная исходная задача; D1 – решение с кратким объяснением; D2 – объяснение с аргументацией и/или координацией репрезентаций; D3 – интерактивно-рефлексивное задание, включающее защиту, анализ ошибки, альтернативы или пересмотр решения. Математическая сложность и уровень D не отождествляются.

Процедура включает девять шагов: 1) выделение математического ядра; 2) определение базового действия исходной задачи; 3) выявление дискурсивного потенциала; 4) выбор целевых компонентов T–S–L–Si–K–R; 5) добавление соответствующих операторов; 6) назначение уровня D1–D3; 7) определение наблюдаемого продукта; 8) привязка критериев оценивания; 9) индексирование задания в банке. Критериями качества служат математическая корректность, сохранение ядра, соответствие цели, наблюдаемость продукта, отсутствие избыточной нагрузки и возможность критериального оценивания.

Результаты.

Дискурсивное математическое задание определяется как учебная задача, которая при сохранении математического ядра содержит явные требования к внешнему выражению и регулированию математического мышления посредством объяснения, обоснования, координации репрезентаций, взаимодействия и/или рефлексии.

Его проектировочную структуру можно представить формулой: «математическое ядро + дискурсивный оператор + при необходимости репрезентационное требование + форма взаимодействия + ожидаемый продукт +

критерий оценивания». Это не жесткий шаблон: преподаватель выбирает только те элементы, которые соответствуют цели занятия.

Главным результатом является принцип инвариантности математического ядра при вариативности дискурсивного требования. Благодаря ему одна и та же задача может существовать в версиях D0–D3, что позволяет дозировать нагрузку и постепенно переводить студента от выполнения процедуры к объяснению, аргументации и рефлексии.

Разработанный прототип содержит 37 заданий, связанных с конкретными номерами исходного сборника [13]. В таблице приведены шесть характерных примеров.

Таблица 2. Примеры трансформации традиционных задач

Раздел / задача	Дискурсивное наращивание	Уровень / коды	Ожидаемый продукт
Функция, №76(2). Тождественны ли следующие функции $f(x)=\lg(x^2)$ и $g(x)=2\lg x$?	Сравнить $f(x)=\lg(x^2)$ и $g(x)=2\lg x$: найти области определения, различить равенство выражений и функций, привести контрпример к неверному обобщению.	D3; T–S–L–K–R	таблица «формула–область–вывод», контрпример
Предел, №191. Докажите равенство $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$. При каких значениях δ из неравенства $0<\lvert x-2\rvert<\delta$ следует неравенство $\lvert(2x-1)-3\rvert<0{,}01$?	В ε–δ доказательстве объяснить зависимость δ(ε), проверить конкретное ε и оценить тезис «δ всегда равно ε».	D2; T–S–L	формальное и словесное доказательство
Непрерывность, №322. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.	Связать поведение нечетного многочлена при ±∞ с теоремой Больцано–Коши; различить «хотя бы один» и «единственный» корень; защитить доказательство.	D3; T–S–L–K	краткое доказательство и защита

Раздел / задача	Дискурсивное наращивание	Уровень / коды	Ожидаемый продукт
Производная, №448. Материальная точка движется по дуге окружности $x^2 + y^2 = 100$, расположенной в первой четверти. Её ордината увеличивается с постоянной скоростью 2 см/с. Координаты x и y измеряются в сантиметрах. Найдите скорость изменения абсциссы точки в момент, когда её ордината равна 6 см. Укажите, увеличивается или уменьшается абсцисса в этот момент.	В задаче о связанных скоростях интерпретировать знак производной и графически опровергнуть ошибочную интуицию.	D3; S–L–Si–K–R	расчет, график, анализ ошибки
Интеграл, №754. Интегрировать по частям. $\int xsin2xdx$	Обосновать выбор интегрирования по частям, объяснить выбор u и dv, проверить ответ дифференцированием.	D2; S–L–R	решение с аргументом выбора метода
Ряды, №1074. Убедитесь, что признак Лейбница не может быть применен к следующему ряду. Исследуйте на сходимость $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)$	Сформулировать условия признака Лейбница, указать нарушенное условие, объяснить различие между неприменимостью признака и расходимостью, защитить классификацию.	D3; T–S–L–K–R	таблица условий и аргументированная классификация

Банк индексируется по теме, номеру исходной задачи, математическому ядру, уровню D, кодам T–S–L–Si–K–R, ожидаемому продукту и фокусу оценивания. Такая система позволяет выбирать задание не только по содержанию, но и по требуемому виду математической деятельности. Именно

наличие метаданных отличает банк от случайной подборки переработанных упражнений.

Методически нецелесообразно превращать каждое упражнение в D3-задание. Дискурсивные задания не заменяют процедурную практику, а дополняют ее. Для 50-минутного практического занятия ориентировочно может использоваться сочетание нескольких коротких D0-задач, одного-двух заданий D1/D2 и одного опорного D2/D3-задания для аргументации, обсуждения или рефлексии. Оценивать следует только те дискурсивные компоненты, которые явно востребованы формулировкой.

Обсуждение. Предложенная методика переводит общую идею математического дискурса в язык проектирования заданий. В коммогнитивном подходе Сфард обучение связано с изменением способов математической коммуникации [1; 2]; в нашей модели преподаватель заранее задает, какое дискурсивное действие должно стать наблюдаемым в конкретной задаче. Требование концептуальной ясности согласуется с выводами Рюве [3]: термин «дискурсивное задание» не используется как синоним любого задания, обсуждаемого вслух, а связывается с явным смысловым, аргументативным, семиотическим, коммуникативным или рефлексивным требованием.

Оператор Si опирается на различение Дювалем обработки и конверсии между регистрами [4]. Это особенно важно в математическом анализе, где понимание предела, производной, непрерывности и рядов требует согласования формулы, графика и словесной интерпретации. Логико-аргументативный компонент L согласуется с исследованиями доказательства, где существенны построение, оценка, опровержение и пересмотр утверждений [5]. При этом аргументация востребована не только в формальном доказательстве: студент может обосновывать выбор метода интегрирования или условия применимости признака сходимости.

Наиболее непосредственной теоретической опорой являются работы Мугаллимовой. Ее тезис о задаче как ядре педагогического дискурса [10] в предложенной модели получает проектную конкретизацию: исходная задача сохраняется как математический инвариант, а ее дискурсивная функция варьируется в зависимости от цели. Уровни D0–D3 и коды T–S–L–Si–K–R позволяют сделать эту вариативность явной и управляемой. Для будущего учителя такое проектирование имеет профессиональную ценность: метазадание

«преобразуйте D0-задачу в D1–D3 и обоснуйте операторы» развивает не только математические, но и методические способы действия [12].

В отличие от подходов, ориентированных преимущественно на разработку новых cognitively demanding или rich tasks [7–9], предложенная методика исходит из уже существующего фонда задач. Это важно для практики высшей школы, где преподаватель часто располагает большим традиционным сборником, но ограничен временем на создание принципиально нового содержания. Методика показывает, как менять не математический объект, а требования к деятельности студента.

Теоретически значимо разведение математической сложности и дискурсивной насыщенности. Технически сложная задача может оставаться D1, а простая задача на область определения – стать D3 при включении анализа типичной ошибки, контрпримера и защиты позиции. Это создает отдельную ось проектирования учебной сложности.

Ограничения исследования очевидны. Во-первых, модель пока не прошла педагогическую экспериментальную проверку. Во-вторых, корпус создан на материале одного сборника математического анализа [13]. В-третьих, компоненты T–S–L–Si–K–R в реальных ответах могут перекрываться; поэтому они предназначены прежде всего для проектирования и аналитического описания, а не для жесткой классификации. Следующие этапы должны включать экспертную оценку содержательной валидности, пилотное кодирование несколькими экспертами, уточнение рубрик и апробацию банка на практических занятиях.

Заключение. Разработана методика трансформации традиционных математических задач в дискурсивные задания на материале математического анализа. Ее ключевая идея – не произвольное усложнение содержания, а сохранение математического ядра при целенаправленном изменении требований к деятельности студента.

Основные результаты: система операторов T–S–L–Si–K–R; уровни D0–D3; девятиэтапная процедура трансформации; архитектура индексируемого банка; прототип из 37 заданий по шести разделам курса. Научно-методическая новизна состоит в переходе от общего требования «организовать математический дискурс» к воспроизводимой процедуре, связывающей исходную задачу, целевой

компонент, уровень дискурсивного требования, наблюдаемый продукт и критерий оценивания.

Перспективы дальнейшего исследования связаны с экспертной валидацией, пилотным внедрением и сравнением различных сочетаний D-уровней и операторов в практических занятиях. Отдельного изучения требует перенос модели на алгебру, геометрию и другие математические дисциплины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sfard A. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning // Educational Studies in Mathematics. 2001. Vol. 46. P. 13–57. DOI: 10.1023/A:1014097416157.

2. Sfard A. Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. DOI: 10.1017/CBO9780511499944.

3. Ryve A. Discourse research in mathematics education: A critical evaluation of 108 journal articles // Journal for Research in Mathematics Education. 2011. Vol. 42, No. 2. P. 167–198. DOI: 10.5951/jresematheduc.42.2.0167.

4. Duval R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics // Educational Studies in Mathematics. 2006. Vol. 61, No. 1–2. P. 103–131. DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z.

5. Stylianides G. J., Stylianides A. J., Moutsios-Rentzos A. Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review // ZDM – Mathematics Education. 2024. Vol. 56. P. 47–59. DOI: 10.1007/s11858-023-01518-y.

6. National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000.

7. Stein M. K., Engle R. A., Smith M. S., Hughes E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell // Mathematical Thinking and Learning. 2008. Vol. 10, No. 4. P. 313–340. DOI: 10.1080/10986060802229675.

8. Smith M. S., Stein M. K. Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice // Mathematics Teaching in the Middle School. 1998. Vol. 3, No. 5. P. 344–350.

9. Powell A. B., Alqahtani M. M. Tasks and meta-tasks to promote productive mathematical discourse in collaborative digital environments // The Eurasia Proceedings of Educational & Social Sciences. 2015. Vol. 2. P. 254–263.

10. Мугаллимова С. Р. Типология учебных задач с позиций учебного математического дискурса // Перспективы развития образования: материалы IV Междунар. науч. конф. Пермь: Меркурий, 2013. С. 125–127.

11. Мугаллимова С. Р. Дискурсивный подход к обучению математике: обоснование и некоторые положения // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. 2015. № 1. С. 69–80.

12. Мугаллимова С. Р. О роли дискурсивной компетенции в подготовке учителя математики // Профессионализм педагога: сущность, содержание, перспективы развития: материалы Междунар. науч.-практ. конф. Ч. 2. М.: МАНПО, 2018. С. 410–413.

13. Тошметов О., Тургунбаев Р. М. Математический анализ: сборник примеров и задач. Ч. 1. Ташкент: ТГПУ им. Низами, 2006.

14. Snyder H. Literature review as a research methodology: An overview and guidelines // Journal of Business Research. 2019. Vol. 104. P. 333–339. DOI: 10.1016/j.jbusres.2019.07.039.