FOKKER–PLANK TENGLAMASINING AKTUAR MATEMATIKADA QO‘LLANILISHI

Muhiddinova Munavvar Rustamjon qizi
O’zbekiston Milliy universiteti
mukhiddinova1101@gmail.com

Annotatsiya

Ushbu tezisda Fokker–Plank tenglamasi va uning aktuar matematikadagi ahamiyati ko’rib chiqiladi. Drift va diffuziya koeffitsiyentlari amaliy ma’lumotlar asosida qanday baholanishi tahlil qilinadi.

Аннотация. *В тезисах рассматривается уравнение Фоккера — Планка и его значение для актуарной математики. Анализируется, каким образом коэффициенты дрейфа и диффузии могут оцениваться на основе практических данных.*

Ключевые слова: *уравнение Фоккера — Планка, актуарная математика, дрейф, диффузия, стохастические процессы.*

Abstract. *This paper examines the Fokker–Planck equation and its significance in actuarial mathematics. It considers how drift and diffusion coefficients can be estimated from empirical data.*

Keywords: *Fokker–Planck equation, actuarial mathematics, drift, diffusion, stochastic processes.*

1 Kirish

Zamonaviy aktuar matematikada risklarni baholash va sug’urta jarayonlarini modellashtirish muhim ahamiyat kasb etadi. Sug’urta kompaniyalari faoliyati tasodifiy omillar ta’sirida shakllanadi, masalan, kutilmagan zararlar, to’lovlar va daromadlarning o’zgaruvchanligi. Shu sababli bunday jarayonlarni aniqlashda stoxastik modellar keng qo’llaniladi. Shunday modellar qatorida Fokker–Plank tenglamasi alohida o‘rin tutadi. Ushbu tenglama tasodifiy jarayonlarning ehtimollik zichligi funksiyasining vaqt bo‘yicha evolyutsiyasini ifodalaydi va murakkab tizimlarni tahlil qilishda samarali vosita hisoblanadi.

2 Fokker-Plank tenglamasi

Fokker–Plank tenglamasi stoxastik differensial tenglamalar bilan chambarchas bog‘liq bo‘lib, u ehtimollik taqsimotining vaqt davomida qanday o‘zgarishini ko‘rsatadi:

$$\frac{\delta p(x,t)}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x}(\mu(x,t)p(x,t)) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta x^2}(\sigma^2(x,t)p(x,t)), \qquad x \in R, \quad t > 0$$

bunda,

• $p(x,t)$ - ehtimollik zichiligi funsiyasi. U zarra (yoki sistema) ning berilgan t vaqt momentidagi ehtimoliy joylashuvini aniqlaydi;

• $\mu(x,t)$ - drift koeffitsiyenti (tendensiya). U fazodagi zarraning yo'nalgan harakatini o'rtacha tezligini ifodalaydi;

• $\sigma^2(x,t)$ - diffuziya koeffitsiyenti (dispersiya). U tizimdagi tasodifiy tebranishlar yoki shovqin intensivligini ifodalaydi.

3Qo'llanilishi

Amaliyotda drift va diffuziya koeffitsiyentlari model parametrlaridan yoki statistik ma'lumotlar asosida baholanadi. Xususan, drift koeffitsiyenti jarayonning o'rtacha o'zgarishi sifatida, diffuziya koeffitsiyenti esa uning dispersiyasi orqali aniqlanadi. Ushbu parametrlar yordamida ehtimollik zichligi funksiyasining evolyutsiyasi Fokker–Plank tenglamasi orqali ifodalanadi. Aytaylik, bizga statistik ma'lumotlar berilgan bo'lsin. Diskret vaqt oralig'i uchun quyidagi o'zgarish kiritiladi:

$$\Delta X = X_{t+\Delta t} - X_t$$

Drift koeffitsiyenti:

Drift koeffitsiyenti jarayonning o'rtacha o'zgarishini ifodalaydi va quyidagicha baholanadi:

$$\mu(x,t) \approx \frac{\mathbb{E}[\Delta X]}{\Delta t}$$

Bu yerda $\mathbb{E}[\Delta X]$ — o'zgarishlarning o'rtacha qiymati bo'lib, amaliyotda u tanlanmanig o'rtachasi orqali hisoblanadi:

$$\mathbb{E}[\Delta X] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i$$

Diffuziya koeffitsiyenti:

Diffuziya koeffitsiyenti jarayonning tasodifiy tebranishlarini ifodalaydi va dispersiya orqali aniqlanadi:

$$\sigma^2(x,t) \approx \frac{\mathrm{Var}(\Delta X)}{\Delta t}$$

bu yerda $\mathrm{Var}(\Delta X)$ tanlanmaning dispersiyasi orqali hisoblanadi:

$$\mathrm{Var}(\Delta X) \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta X_i - \overline{\Delta X}\right)^2$$

Koeffitsiyentlarni Fokker-Plank tenglamasiga qo'yib, quyidagi yechimni olamiz:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} exp(-\frac{(x - x_0 + \mu t)^2}{2\sigma^2 t})$$

Bu yechim X_t ning ehtimollik zichlik funksiyasi bo'lib, uning normal taqsimlanganligini bildiradi: $X_t \sim N(X_0 + \mu t, \sigma^2 t)$ Ma'lumki, Normal taqsimotda matematik kutilma: $E[X_t] = X_0 + \mu t$. Agar statistik ma'lumotlarimizning so'nggisini X_0 deb qarasak, keyingi qadam uchun o'rtacha prognozni aytish mumkin bo'ladi.

4Xulosa

Natijalar shuni ko‘rsatadiki, ushbu tenglama sug‘urta risk jarayonlarining vaqt bo‘yicha evolyutsiyasini tasvirlashda muhim vosita bo‘lib, tasodifiy tebranishlar va o‘rtacha tendensiyalarni birgalikda hisobga olish imkonini beradi. Bu esa aktuar modellarni chuqurroq tahlil qilish va bankrotlik ehtimoli kabi risk ko‘rsatkichlarini baholashda samarali hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Øksendal, B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. — 6th ed. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. — 360 p.
2. Risken, H. The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications. — 2nd ed. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1996. — 472 p.
3. Gardiner, C. W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. — 2nd ed. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1996. — 442 p.