ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ СИМПЛЕКСА

Шаробиддинова Гулшода Рустамжон кизи
Андижанский Государственный Университет
uktamjonovagulshoda@gmail.com

Аннотация. *Исследуются вольтеровские квадратичные стохастические операторы на двумерном симплексе, являющиеся гомеоморфизмами симплекса. В терминах кососимметрической матрицы оператора получен критерий существования внутренней неподвижной точки, совпадающий с цикличностью соответствующего турнира. Доказано, что в ацикличном случае все внутренние траектории сходятся к вершине-источнику со скоростью, определяемой элементами матрицы. В цикличном случае построена строго убывающая функция Ляпунова и доказано, что ω-предельное множество каждой нетривиальной внутренней траектории бесконечно и лежит на границе симплекса. Результаты подтверждены численным экспериментом в логарифмических координатах.*

Ключевые слова: *квадратичный стохастический оператор, оператор Вольтерра, гомеоморфизм симплекса, функция Ляпунова, ω-предельное множество, турнир, гетероклинический цикл.*

Annotatsiya. *Ikki o'lchovli simpleksda gomeomorfizm bo'lgan Volterra kvadratik stoxastik operatorlari o'rganiladi. Ichki qo'zg'almas nuqta mavjudligi mos turnirning sikliklik sharti bilan ustma-ust tushishi isbotlangan. Atsiklik holda barcha ichki traektoriyalar manba-uchga matritsa elementlari bilan aniqlanuvchi tezlikda yaqinlashadi. Siklik holda qat'iy kamayuvchi Lyapunov funksiyasi qurilgan va har bir notrivial ichki traektoriyaning ω-limit to'plami cheksiz hamda simpleks chegarasida yotishi isbotlangan. Natijalar logarifmik koordinatalardagi hisoblash tajribasi bilan tasdiqlangan.*

Kalit so'zlar: *kvadratik stoxastik operator, Volterra operatori, simpleks gomeomorfizmi, Lyapunov funksiyasi, ω-limit to'plam, turnir, geteroklinik sikl.*

Abstract. *We study Volterra quadratic stochastic operators on the two-dimensional simplex, which are homeomorphisms of the simplex. We show that an interior fixed point exists if and only if the associated tournament is cyclic. In the acyclic case every interior trajectory converges to the source vertex at a rate determined by the entries of the skew-symmetric matrix. In the cyclic case we*

construct a strictly decreasing Lyapunov function and prove that the ω-limit set of every non-trivial interior trajectory is infinite and lies on the boundary of the simplex. The results are illustrated by a numerical experiment in logarithmic coordinates.

Keywords: *quadratic stochastic operator, Volterra operator, homeomorphism of the simplex, Lyapunov function, ω-limit set, tournament, heteroclinic cycle.*

1. Введение

Квадратичные стохастические операторы (КСО) возникли в работе С.Н. Бернштейна [1] как математическая модель эволюции популяции с панмиксией. С.М. Улам [2] поставил вопрос об асимптотике итераций КСО и высказал гипотезу об их эргодичности (сходимости средних Чезаро). М.И. Захаревич [4] опроверг эту гипотезу на примере вольтерровского оператора на двумерном симплексе. Тем самым именно двумерный случай оказался минимальной размерностью, в которой появляется нетривиальная динамика.

В литературе сложились два подхода, которые следует различать. Классический популяционно-генетический подход (Ю.И. Любич [3]) исследует КСО как алгебраические отображения с акцентом на стационарность и свойства наследования. Динамический подход, развитый ташкентской школой (Р.Н. Ганиходжаев [5, 6], далее [7, 8, 11]), строит для вольтерровских КСО функции Ляпунова и связывает динамику с комбинаторикой турниров. Параллельно в эволюционной теории игр [9] вольтерровские операторы интерпретируются как дискретные аналоги репликаторной динамики для игр с нулевой суммой; здесь главный инструмент — гетероклинические циклы и перманентность.

Между этими направлениями есть существенное расхождение. Для непрерывной репликаторной динамики игры типа «камень–ножницы–бумага» с нулевой суммой внутренняя точка окружена семейством замкнутых орбит (консервативный случай) [9]. Дискретный вольтерровский оператор с той же кососимметричной матрицей ведёт себя качественно иначе: дискретизация разрушает первый интеграл, и траектории уходят на границу. Этот контраст показывает, что переносить выводы из непрерывной теории на отображения симплекса некорректно.

Известно [5, 7], что вольтерровский КСО является гомеоморфизмом симплекса, а любой КСО-гомеоморфизм представим как композиция вольтерровского оператора и перестановки вершин. Поэтому изучение вольтерровских операторов — необходимый первый шаг к описанию динамики всех квадратичных гомеоморфизмов.

Пробел и цель. Результаты [5, 6, 11] сформулированы в общей размерности и опираются на теорию турниров; при этом количественные характеристики (скорость сходимости, рост времён пребывания вблизи вершин) и корректность численного моделирования в них не рассматриваются. Цель статьи — дать полное элементарное описание динамики вольтерровских гомеоморфизмов двумерного симплекса в невырожденном случае с явными оценками и численно устойчивой процедурой моделирования.

2. Предварительные сведения

Пусть

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_i \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\},$$

$\mathrm{int}S^2$ — множество точек с положительными координатами, ∂S^2 — граница, e_1, e_2, e_3 — вершины. КСО $V \colon S^2 \to S^2$ задаётся равенствами $x'_k = \sum_{i,j} p_{ij,k}\, x_i x_j$, где $p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0$ и $\sum_k p_{ij,k} = 1$. Оператор называется вольтерровским, если $p_{ij,k} = 0$ при $k \notin \{i, j\}$. В этом случае [5, 7]

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^{3} a_{ki}\, x_i\right) = x_k(1 + (Ax)_k), \qquad k = 1,2,3, \qquad (1)$$

где $a_{ki} = 2p_{ik,k} - 1$, так что матрица $A = (a_{ki})$ кососимметрична и $|a_{ki}| \leq 1$. Обозначим $a = a_{12}$, $b = a_{13}$, $c = a_{23}$. Оператор принимает вид

$$x_1' = x_1(1 + ax_2 + bx_3), \quad x_2' = x_2(1 - ax_1 + cx_3), \quad x_3' = x_3(1 - bx_1 - cx_2). \qquad (2)$$

Назовём оператор **невырожденным**, если $abc \neq 0$. Невырожденному оператору сопоставим турнир $T(A)$ на вершинах $\{1,2,3\}$: дуга $i \to j$ проводится, если $a_{ij} > 0$ («тип i доминирует над типом j»). Турнир на трёх вершинах либо цикличен (сильно связен), либо ацикличен и имеет единственную вершину-источник.

Лемма 1. Для всякого $x \in S^2$ и всякого k выполнено $1 + (Ax)_k \geq x_k$. Следовательно, $V(S^2) \subseteq S^2$, каждая грань симплекса инвариантна, $V(\mathrm{int}S^2) \subseteq \mathrm{int}S^2$, а вершины неподвижны.

Доказательство. Так как $a_{kk} = 0$ и $a_{ki} \geq -1$, имеем $(Ax)_k \geq -\sum_{i \neq k} x_i = -(1 - x_k)$. Поэтому $x'_k \geq x_k^2 \geq 0$, и $x'_k > 0$ при $x_k > 0$. Кроме того, $\sum_k x'_k = \sum_k x_k + x^{\mathsf{T}} A x = 1$ вследствие кососимметричности A. Равенство $x_k = 0$ влечёт $x'_k = 0$, откуда инвариантность граней. ▫

Известно [5, 7], что V — гомеоморфизм S^2; в дальнейшем используется лишь то, что V непрерывен и сужение V на каждое ребро биективно. Для $x^0 \in S^2$ полагаем $x^n = V^n(x^0)$ и обозначаем через $\omega(x^0)$ множество предельных точек последовательности $\{x^n\}$. Из компактности S^2 и непрерывности V

следует, что $\omega(x^0)$ непусто, замкнуто и $V\big(\omega(x^0)\big) = \omega(x^0)$.

Лемма 2 (динамика на рёбрах). Пусть $a_{ij} \neq 0$. Для любой точки внутренности ребра $[e_i, e_j]$ траектория сходится к e_i при $a_{ij} > 0$ и к e_j при $a_{ij} < 0$; обратная траектория сходится к противоположной вершине.

Доказательство. На ребре $x_j = 1 - x_i$, и $x'_i = f(x_i)$, где $f(t) = t + a_{ij}t(1-t)$. Функция f не убывает на $[0,1]$, поскольку $f'(t) = 1 + a_{ij}(1 - 2t) \geq 1 - |a_{ij}| \geq 0$, и её неподвижные точки — только 0 и 1. При $a_{ij} > 0$ имеем $f(t) > t$ на $(0,1)$; монотонная ограниченная последовательность сходится к неподвижной точке f, то есть к 1. Случай $a_{ij} < 0$ и случай обратного отображения аналогичны. ▫

3. Основные результаты

3.1. Неподвижные точки

Теорема 1. Пусть V невырожден. Тогда на ∂S^2 неподвижны только вершины. Внутренняя неподвижная точка существует тогда и только тогда, когда турнир $T(A)$ цикличен, то есть когда числа $c, -b, a$ имеют одинаковый знак. В этом случае она единственна:

$$p = \frac{(c, -b, a)}{a - b + c}. \qquad (3)$$

Доказательство. Для точек рёбер утверждение следует из леммы 2. Точка $x \in \operatorname{int} S^2$ неподвижна тогда и только тогда, когда $Ax = 0$. Кососимметричная матрица 3×3 с $abc \neq 0$ имеет ранг 2, и её ядро порождается вектором $(c, -b, a)$, что проверяется подстановкой. Пересечение ядра с $\operatorname{int} S^2$ непусто тогда и только тогда, когда компоненты этого вектора одного знака. При $a > 0$, $c > 0$, $b < 0$ турнир имеет дуги $1 \to 2 \to 3 \to 1$, то есть цикличен; случай противоположных знаков даёт обратный цикл. Остальные расстановки знаков дают ациклический турнир. ▫

3.2. Ациклический случай

Теорема 2. Пусть V невырожден, $T(A)$ ацикличен и s — его источник. Тогда для любого x^0 с $x_s^0 > 0$ выполнено $x^n \to e_s$, и для $j \neq s$ с $x_j^0 > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_j^{n+1}}{x_j^n} = 1 - a_{sj} \in [0,1). \qquad (4)$$

В частности, при $\max_j a_{sj} < 1$ сходимость геометрическая с показателем $\max_{j\neq s}(1 - a_{sj})$, а при $a_{sj} = 1$ — сверхгеометрическая по координате j.

Доказательство. Сопряжение перестановкой координат сохраняет вольтерровский вид ($A \mapsto PAP^{\top}$), поэтому можно считать $s = 1$, то есть $a > 0$, $b > 0$. Тогда $x'_1 = x_1(1 + ax_2 + bx_3) \geq x_1$, и последовательность x_1^n не

убывает и сходится. При этом

$$x_1^{n+1} - x_1^n = x_1^n(ax_2^n + bx_3^n) \geq x_1^0 \min(a,b)(1 - x_1^n) \geq 0.$$

Левая часть стремится к нулю, поэтому $x_1^n \to 1$ и $x^n \to e_1$. Далее, $x_2^{n+1}/x_2^n = 1 - ax_1^n + cx_3^n \to 1 - a$ и $x_3^{n+1}/x_3^n = 1 - bx_1^n - cx_2^n \to 1 - b$. ▫

3.3. Циклический случай

Пусть $T(A)$ цикличен и p — точка (3). Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3}, \qquad x \in S^2. \qquad (5)$$

Она непрерывна, обращается в нуль точно на ∂S^2 и, по взвешенному неравенству о средних, достигает строгого максимума на S^2 только в точке p.

Теорема 3. Пусть V невырожден и $T(A)$ цикличен. Тогда:

1. $\varphi(Vx) \leq \varphi(x)$ для всех $x \in \mathrm{int}S^2$, причём равенство возможно лишь при $x = p$;
2. для всякого $x^0 \in \mathrm{int}S^2 \backslash \{p\}$ имеем $\varphi(x^n) \to 0$, то есть $\omega(x^0) \subseteq \partial S^2$;
3. траектория не сходится, множество $\omega(x^0)$ бесконечно и содержит по крайней мере две вершины и целую траекторию некоторой точки ребра.

Доказательство. (1) По лемме 1 все числа $1 + (Ax)_k$ положительны. В силу строгой вогнутости логарифма и неравенства Иенсена с весами $p_k > 0$

$$\ln \frac{\varphi(Vx)}{\varphi(x)} = \sum_k p_k \ln(1 + (Ax)_k) \leq \ln(1 + p^\top Ax) = 0,$$

поскольку $p^\top Ax = -(Ap)^\top x = 0$. Равенство возможно лишь при $(Ax)_1 = (Ax)_2 = (Ax)_3 = \sigma$; тогда $\sigma = p^\top Ax = 0$, то есть $Ax = 0$ и $x = p$.

(2) Последовательность $\varphi(x^n)$ не возрастает и сходится к $L \geq 0$, причём $L \leq \varphi(x^0) < \varphi(p)$. По непрерывности $\varphi \equiv L$ на $\omega(x^0)$. Если $L > 0$, то $\omega(x^0) \subseteq \mathrm{int}S^2$, и для $y \in \omega(x^0)$ имеем $Vy \in \omega(x^0)$, то есть $\varphi(Vy) = \varphi(y)$. По пункту (1) $y = p$ и $L = \varphi(p)$ — противоречие. Значит, $L = 0$.

(3) Пусть для определённости $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ (другая ориентация цикла рассматривается аналогично). Если $x^n \to e_1$, то $x_3^{n+1}/x_3^n = 1 - bx_1^n - cx_2^n \to 1 - b > 1$, что несовместимо с $x_3^n \to 0$ при $x_3^n > 0$. Аналогично сходимость к e_2 и e_3 исключается пределами $1 + a > 1$ для x_1 и $1 + c > 1$ для x_2.

Предположим, что $\omega(x^0)$ конечно. Так как $V(\omega) = \omega$, все его точки периодичны; по лемме 2 единственные периодические точки в ∂S^2 — вершины. Функция $g(x) = \| Vx - x \|$ непрерывна и равна нулю в вершинах. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы шары $B(e_k, \delta)$ были попарно удалены более чем на δ и $g < \delta$ на их объединении. Начиная с некоторого номера все x^n лежат в

этом объединении и не могут перейти из одного шара в другой за один шаг. Следовательно, траектория сходится к одной вершине, что уже исключено.

Итак, $\omega(x^0)$ бесконечно и содержит точку q из внутренности некоторого ребра $[e_i, e_j]$. Поскольку V — биекция и $V(\omega) = \omega$, имеем $V^n(q) \in \omega(x^0)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. По лемме 2 и замкнутости $\omega(x^0)$ обе вершины e_i, e_j принадлежат $\omega(x^0)$. ▫

Замечание 1. Естественно ожидать, что $\omega(x^0) = \partial S^2$, то есть совпадает с гетероклиническим циклом $e_1 \to e_3 \to e_2 \to e_1$. Для доказательства достаточно дискретного аналога леммы Батлера–Макги для изолированных гиперболических седловых точек; в настоящей статье это утверждение не доказывается и формулируется как открытый вопрос. При $a = 1$ или $c = 1$ вершины перестают быть гиперболическими, и этот случай требует отдельного анализа.

Замечание 2. Пункт (2) контрастирует с непрерывной репликаторной динамикой $\dot{x}_k = x_k(Ax)_k$, для которой φ — первый интеграл [9]. Именно неравенство Иенсена, то есть нелинейность дискретного шага, превращает сохраняемую величину в строгую функцию Ляпунова.

4. Численная иллюстрация

Вычисления выполнены в логарифмических координатах $u_k = \ln x_k$ по схеме $u'_k = u_k + \ln(1 + (Ax)_k)$ с последующей нормировкой через log-sum-exp. Это методологически существенно: в стандартной арифметике двойной точности координаты циклической траектории уже к $n \approx 1000$ падают до 10^{-58}, а к $n = 5000$ исчезают в машинном нуле. Траектория при этом искусственно «залипает» в вершине, что противоречит теореме 3(3) и порождает ложный вывод о сходимости.

Пример 1 (ациклический случай). $a = 0{,}6$; $b = 0{,}4$; $c = 0{,}8$; $x^0 = (0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}6)$. Источник — e_1. Уже при $n = 10$ имеем $x_1 \approx 0{,}9815$, при $n = 20$ — $x_1 \approx 1 - 6{,}7 \cdot 10^{-6}$. Наблюдаемые отношения $x_2^{41}/x_2^{40} = 0{,}4000$ и $x_3^{41}/x_3^{40} = 0{,}6000$ совпадают с теоретическими значениями $1 - a$ и $1 - b$ из теоремы 2.

Пример 2 (циклический случай). $a = 0{,}5$; $b = -0{,}5$; $c = 0{,}5$; тогда $p = (1/3;\ 1/3;\ 1/3)$, $x^0 = (0{,}30;\ 0{,}33;\ 0{,}37)$, число итераций $N = 20\,000$. Монотонность φ подтверждена на всём отрезке; $\ln\varphi(x^n)$ убывает приблизительно линейно по n (табл. 1).

Таблица 1. Значения функции Ляпунова и средних Чезаро в примере 2

n	$\ln\varphi(x^n)$	Среднее Чезаро $(x_1;\ x_2;\ x_3)$
0	−1,10	—
1 000	−85,25	(0,406; 0,253; 0,341)

n	$\ln\varphi(x^n)$	Среднее Чезаро $(x_1; x_2; x_3)$
5 000	−466,95	(0,374; 0,222; 0,403)
10 000	−945,80	(0,187; 0,496; 0,317)
20 000	−1903,49	(0,458; 0,269; 0,273)

Траектория поочерёдно приближается ко всем трём вершинам: за 20 000 шагов зафиксировано 24 смены доминирующей координаты. Длительности пребывания вблизи вершин растут примерно геометрически: последние значения равны 859, 1464, 2499, 4267, 7289 шагов, отношение соседних $\approx 1{,}71$. В результате средние Чезаро не стабилизируются, что согласуется с неэргодичностью [4, 12] и с гипотезой замечания 1. Подчеркнём: численный эксперимент иллюстрирует, но не доказывает несходимость средних — конечный отрезок не даёт оснований для асимптотических утверждений.

5. Обсуждение

Полученные результаты следует сопоставить с известными. Качественная картина теорем 1 и 3 согласуется с общей теорией [5, 6, 11], в которой структура неподвижных точек и функций Ляпунова выводится из свойств турнира. Вклад настоящей работы ограничен и состоит в трёх элементах:

• явная асимптотика скорости сходимости в ациклическом случае (теорема 2), включая вырождение скорости при $a_{sj} = 1$;

• элементарное доказательство бесконечности ω-предельного множества, не использующее теорию турниров и топологическую теорию степени (теорема 3);

• численно устойчивая процедура моделирования и демонстрация того, что наивное моделирование даёт качественно неверный результат.

Ограничения работы следует назвать прямо. Во-первых, вырожденный случай $abc = 0$ не рассмотрен: там целые рёбра состоят из неподвижных точек, и лемма 2 не применима. Во-вторых, рассмотрены только вольтерровские гомеоморфизмы; для композиций $P \circ V$ с нетривиальной перестановкой вершины уже не неподвижны, а грани не инвариантны, и функция φ не переносится непосредственно. В-третьих, утверждение $\omega(x^0) = \partial S^2$ и несходимость средних Чезаро остаются недоказанными в настоящей статье.

Отсюда открытые вопросы:

1. Доказать $\omega(x^0) = \partial S^2$ и найти асимптотику времён пребывания; в примере 2 их отношение стабилизируется около 1,71, что требует аналитического объяснения через собственные значения в вершинах.

2. Описать динамику композиций $P \circ V$ на S^2 для транспозиций и циклической перестановки — это замыкает классификацию всех квадратичных гомеоморфизмов двумерного симплекса.

3. Исследовать вырожденный случай $abc = 0$ и негиперболический случай $|a_{ij}| = 1$.

6. Заключение

Для невырожденных вольтерровских гомеоморфизмов двумерного симплекса динамика полностью определяется типом турнира. В ациклическом случае внутренние траектории сходятся к вершине-источнику с показателями $1 - a_{sj}$. В циклическом случае единственная внутренняя неподвижная точка отталкивает траектории, они приближаются к границе и не имеют предела, а их ω-предельные множества бесконечны. Для численного исследования таких систем необходимо использовать логарифмические координаты. Естественное продолжение работы — анализ композиций вольтерровских операторов с перестановками вершин.

Список литературы

1. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Учёные записки Н.-И. кафедр Украины. — 1924. — Вып. 1. — С. 83–115.

2. Ulam S.M. A Collection of Mathematical Problems. — New York: Interscience, 1960.

3. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. — Киев: Наукова думка, 1983.

4. Захаревич М.И. О поведении траекторий и эргодической гипотезе для квадратичных отображений симплекса // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 207–208.

5. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры // Матем. сборник. — 1992. — Т. 183, № 8. — С. 119–140.

6. Ганиходжаев Р.Н. Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56, № 5. — С. 40–49.

7. Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F., Rozikov U. Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 2011. — Vol. 14, No. 2. — P. 279–335.

8. Mukhamedov F., Ganikhodjaev N. Quantum Quadratic Operators and Processes. — Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2133. — Cham: Springer, 2015.

9. Hofbauer J., Sigmund K. Evolutionary Games and Population Dynamics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

10. Rozikov U.A. Population Dynamics: Algebraic and Probabilistic Approach. — Singapore: World Scientific, 2020.

11. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий // Владикавказский мат. журнал. — 2006. — Т. 8, № 2. — С. 12–28.

12. Ganikhodzhaev N.N., Zanin D.V. On a necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on the two-dimensional simplex // Russian Mathematical Surveys. — 2004. — Vol. 59, No. 3. — P. 571–572.