РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Сидикова Мархабо Азизжон кизи
Академический лицей при Филиале РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина в Ташкенте
mccomn7gmail.com

Annotatsiya. *Abelning nochiziqli differensial tenglamalari birinchi tartibli tenglamalarning eng muhim turlaridan biri bo‘lib, nochiziqli tizimlarning ko‘plab turlarini umumlashtiradi. Abel tenglamalarini tahlil qilish maxsus nuqtalar va ajratilgan yechimlarning mavjudligini, yechimlarning turg‘unligini hamda fazaviy trayektoriyalarning xatti-harakatini aniqlash imkonini beradi.*

Mazkur maqolada Abelning birinchi turdagi nochiziqli differensial tenglamalarini yechish usullari o‘rganiladi, ayrim xususiy hollar ko‘rib chiqiladi hamda muayyan shartlar asosida yechim taklif etiladi.

Kalit so‘zlar: *Abel tenglamasi, xususiy yechimlar, tenglamalar ayniyati, yechimlar oilasi parametri.*

Аннотация*. Нелинейные дифференциальные уравнения Абеля являются одним из важнейших уравнений первого порядка, которое обобщает многие типы нелинейных систем. Анализ уравнений Абеля помогает определить наличие особых точек и изолированных решений, устойчивость решений, поведение фазовых траекторий.*

В данной статье изучаются методы решения нелинейных дифференциальных уравнений Абеля первого рода, рассматриваются некоторые частные случаи и предлагается решение при определенных условиях.

Ключевые слова: *уравнение Абеля, частные решения, идентичность уравнений, параметр семейства решений.*

Annotation: *Nonlinear Abel differential equations are among the most important first-order differential equations and generalize many types of nonlinear systems. The analysis of Abel equations makes it possible to determine the existence of singular points and isolated solutions, the stability of solutions, and the behavior of phase trajectories.*

This paper studies methods for solving nonlinear first-order Abel differential equations, considers several special cases, and proposes a solution under certain conditions.

Keywords: *Abel equation, particular solutions, identity of equations, parameter of the family of solutions.*

Введение. Исследования уравнений Абеля способствовали развитию инвариантной теории, теории интегрируемости, асимптотического анализа и трансцендентных функций, методов групп Ли. Впервые данное уравнение вводится Нильсом Абелем в 1827 году, и он показывает, что эти уравнения не имеют решения в элементарных функциях. Далее, Луивилль, Аппель и другие ученые развивают эту сферу. Но вопрос их общей интегрируемости остается открытым, что и определяет их сегодняшнюю актуальность и значимость.

Рассмотрим решение закрытой формы Абелева уравнения при определенных условиях.

Далее, знак штриха обозначает дифференцирование по нижнему индексу, то есть $y'_x = \frac{dy}{dx}, q'_z = \frac{dq}{dz}$. Теперь рассмотрим уравнение Абеля первого рода:

$$y'_x = f_3(x)y^3 + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), y = y(x) \qquad (1.1)$$

В частных случаях это дифференциальное уравнение можно привести к некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям, таким как уравнение с разделяющимися переменными, линейные уравнения, уравнения Бернулли, Рикатти и некоторые другие.

Две формы Абеля (первый (1.1) с $f_0 = 0, f_2 \neq 0$ и второй произвольный) сводятся к уравнениям Абеля одинаковой формы. Затем, требуя идентичность этих уравнений мы получим определенные условия.

Мы требуем, чтоб свободный член f_0 в уравнении (1.1) равнялось нулю. В таком случае, используя следующие замены

$$y(x) = t(x)q[z(x)], \qquad (2.2.1a)$$

$$z(x) = \int f_2 t(x)dx, \;\; t(x) = \exp(\int f_1 dx) \qquad (2.2.1b)$$

получим

$$q' = \frac{f_3 t}{f_2} q^3 + q^2, x = x(z) \qquad (1.2)$$

Также рассмотрим «произвольное» уравнение [3]:

$$w_x' = [w^2 - (f+g)w + fg]\left(w - \frac{g-cf}{1-c}\right)h + \frac{f_x' - g_x'}{f-g}w + \frac{fg_x' - gf_x'}{f-g}, \tag{1.3}$$

где c-параметр и $f = f(x), g = g(x), h = h(x)$ являются произвольными функциями по x.

По [4], уравнение (1.3) имеет общее решение замкнутой формы, точнее такое

$$|w-f|^c|w-g|^{-1}\left|w - \frac{g-cf}{1-c}\right|^{1-c} = Kexp\left[\frac{c}{1-c}\int(f-g)^2 h dx\right], \tag{1.4}$$

где K-интегральная константа.

Уравнение (1.3) имеет следующую структуру:

$$w_x' = A(x)w^3 + B(x)w^2 + C(x)w + D(x),$$

но коэффициенты связаны между собой особым образом. Именно эта специальная связь делает уравнение интегрируемым.

Введем замену:

$$u = \frac{w-g}{w-f},$$

Упрощая уравнение после замен можно убедиться, что уравнение (2.2.6) сводится к следующему уравнению

$$p_r' = -\frac{1}{1+c}\frac{s}{f}p^3 + p^2, \;\; x = x(r). \tag{1.5}$$

Утверждение 1. *Уравнения (1.2) и (1.5) идентичны тогда и только тогда, когда имеют место следующие соотношения*:

$$\left(\frac{f_3}{f_2}\right)_x' = \frac{c}{1+c^2}f_2 - \frac{f_3 f_1}{f_2} \tag{1.6}$$

и

$$f^2 h = \frac{1}{(1+c)^2}\frac{f_2^2}{f_3}, \tag{1.7}$$

где c-произвольная константа.

Теорема 1. *Если выполняются условия (1.6) и (1.7), тогда уравнение Абеля (1.1), где $f_0 = 0$ и $f_2 \neq 0$ имеет общее неявное решение следующего вида*

$$|(1+c)v(x)y + 1|^c|(1+c)v(x)y + c|^{-1} -$$
$$-K|(1+c)v(x)y|^{c-1}exp\left[\frac{c(1-c)}{(1+c)^2}\int\frac{f_2}{v}dx\right] = 0, \tag{1.8}$$

где $v(x) = f_3(x)/f_2(x)$, *c- произвольная константа и K- параметр семейства решений.*

Доказательство. Заменяя (1.6) и (1.7), формула, описывающая общее решение (1.4), становится

$$|w-f|^c|w-cf|^{-1}\left|w-\frac{cf-cf}{1-c}\right|^{1-c} = Kexp\left[\frac{c}{1-c}\int(f-cf)^2hdx\right],$$

$$\left|1-\frac{f}{w}\right|^c\left|1-c\frac{f}{w}\right|^{-1} = Kexp[c(1-c)\int f^2hdx]. \quad (1.9)$$

Кроме этого, с помощью (2.2.1a), (2.2.1b) уравнение приводится к следующим:

$$\frac{y}{t}=\frac{w}{s},$$

$$\frac{1}{w}=\frac{t}{ys},$$

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{y}\frac{e^{\int f_1dx}}{fe^{\int cf^2hdx}},$$

$$\frac{f}{w}=\frac{1}{y}exp\left[\int(-cf^2h+f_1)dx\right].$$

Теперь примет следующий вид:

$$\frac{f}{w}=-\frac{1}{1+c}\frac{f_2}{yf_3}.$$

Далее замены соответственно, приводят к общему решению, точнее:

$$\left|1+\frac{1}{1+c}\frac{f_2}{yf_3}\right|^c\left|1+\frac{c}{1+c}\frac{f_2}{yf_3}\right|^{-1} = Kexp\left[\frac{c(1-c)}{(1+c)^2}\int\frac{f_2^2}{f_3}dx\right],$$

дадим общий знаменатель,

$$\left|(1+c)\frac{f_3}{f_2}y+1\right|^c\left|(1+c)\frac{f_3}{f_2}y+c\right|^{-1} =$$

$$= K(1+c)^{c-1}\frac{f_3}{f_2}y\,xp\left[\frac{c(1-c)}{(1+c)^2}\int\frac{f_2^2}{f_3}dx\right],$$

заменим $v(x) = f_3(x)/f_2(x)$,

$$|(1+c)v(x)y+1|^c|(1+c)v(x)y+c|^{-1} =$$

$$= K|(1+c)v(x)y|^{c-1}\,exp\left[\frac{c(1-c)}{(1+c)^2}\int\frac{f_2}{v}dx\right].$$

Заметим то, что хотя и функция f_1 не участвует в общем решении, оно есть в (1.6), и поэтому влияет на вычисление значения c. Также, рассматривая начальное условие, связанное с уравнением (1.2), точнее

$$y(x_0) = y_0,$$

и заменяя эти значения в общем решении, параметр K вычисляется следующим образом:

$$K = K(x_0, y_0, c) =$$
$$= |(1+c)v(x_0)y_0|^{1-c} exp\left[\frac{c(c-1)}{(1+c)^2}\int \frac{f_2}{v}dx_{x=x_0}\right] \times$$
$$\times |(1+c)v(x_0)y_0 + 1|^c |(1+c)v(x_0)y_0 + c|^{-1}.$$

Теперь рассмотрим несколько примеров решения уравнений Абеля первого рода, основываясь на предложенные выше методы.

Пример 1. Пусть $f_1 = 0, f_2 = x^3, c = 2\left(\text{или}\frac{1}{2}\right), C = 0$. Тогда найдем $v(x)$:

$$v = e^{-c} \cdot \frac{2}{9} \cdot \int x^3 e^c dx = \frac{1}{18}x^4,$$
$$v = \frac{f_3}{f_2} = \frac{1}{18}x^4 = \frac{f_3}{x^3},$$
$$f_3 = \frac{x^7}{18}.$$

Значит, наше уравнение, удовлетворяющее необходимым условиям таково:

$$y' = \frac{x^7}{18}y^3 + x^3y^2.$$

Итак, найдем решение по (2.3.10):

$$\left|3 \cdot \frac{1}{18}x^4y + 1\right|^2 \left|3 \cdot \frac{1}{18}x^4y + 2\right|^{-1} - K\left|3 \cdot \frac{1}{18}x^4y\right| \cdot e^{-\frac{2}{9}\int \frac{18x^3}{x^4}dx} = 0,$$
$$\left|3 \cdot \frac{1}{18}x^4y + 1\right|^2 \left|3 \cdot \frac{1}{18}x^4y + 2\right|^{-1} - K\left|3 \cdot \frac{1}{18}x^4y\right| \cdot e^{-4lnx} = 0,$$
$$\frac{(x^4y+6)^2}{6(x^4y+12)} - K\frac{1}{6}y = 0,$$
$$x^8y^2 + 12x^4y + 36 - Kx^4y^2 - 12Ky = 0,$$
$$x^4(x^4-K)y^2 + 12(x^4-K)y + 36 = 0.$$
$$D = 12 \cdot 12(x^4-K)^2 - 4 \cdot 36x^4(x^4-K).$$
$$y = \frac{-12(x^4-K) - \sqrt{(x^4-K)(12 \cdot 12(x^4-K) - 4 \cdot 36x^4}}{2x^4(x^4-K)}$$
$$y = -\frac{6}{x^4}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{K}{x^4-K}}\right),$$

Мы уже нашли значения K в точке (1,1):

$$K = \begin{cases} {}^{49}/_{13}, c = 2, \\ {}^{\sqrt{13}}/_{7}, c = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Значит,

$$y = -\frac{36}{8x^3}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{49/13}{x^4 - 49/13}}\right),$$

что и является решением заданного уравнения.

Пример 2. Пусть $f_1 = 0, f_2 = sinx, c = 2\left(\text{или}\frac{1}{2}\right)$, $C = 0$. Тогда найдем $v(x)$:

$$v = e^{-c} \cdot \frac{2}{9} \cdot \int sinxe^c dx = -\frac{2}{9}cosx,$$

$$v = \frac{f_3}{f_2} = -\frac{2}{9}cosx = \frac{f_3}{sinx},$$

$$f_3 = \frac{-sin2x}{9}.$$

Значит, наше уравнение, удовлетворяющее необходимым условиям таково:

$$y' = -\frac{sin2x}{9}y^3 + sinxy^2.$$

Итак, найдем решение по (2.3.10):

$$\left|3 \cdot (-\frac{2}{9}ycosx + 1\right|^2 \left|3 \cdot (-\frac{2}{9}ycosx + 2\right|^{-1} - K\left|3 \cdot (-\frac{2}{9})ycosx\right| \cdot e^{-\frac{2}{9}\int\frac{9tgx}{-2}dx} = 0,$$

$$\left|-\frac{2}{3}ycosx + 1\right|^2 \left|-\frac{2}{3}ycosx + 2\right|^{-1} - K\left|-\frac{2}{3}ycosx\right| \cdot e^{-lncosx} = 0,$$

$$\frac{(3 - 2ycosx)^2}{3(6 - 2cosx)} - K\frac{2}{3}cosx \cdot \frac{1}{cosx} = 0,$$

$$9 - 12ycosx + 4y^2cos^2x - 6K + 6Kcosx = 0,$$

$$4y^2cos^2x - 12ycosx + 9 - 6K + 6Kcosx = 0.$$

$$D = 144cos^2x - 16cos^2x(9 - 6K + 6Kcosx).$$

$$y = \frac{12cosx - 4cosx\sqrt{6K - 6Kcosx}}{8cos^2x}$$

$$y = \frac{1}{cosx}(3 - \sqrt{6K(1 - cosx)}),$$

Найдём значения K в точке (0,1) :

$$K = \begin{cases} {}^{1}/_{8}, c = 2, \\ \sqrt{8}, c = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Значит,

$$y = \frac{1}{cosx}(3 - \frac{1}{2}\sqrt{3(1 - cosx)}),$$

что и является решением заданного уравнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье обширно рассматриваются дифференциальные уравнения Абеля первого рода, методы их решения, а также решены конкретные примеры.

Полученные результаты и решения дифференциальных уравнений Абеля первого рода имеют большое значение в разных областях науки.

Например, применяются при моделировании движения частиц, задачах теплопередачи, нелинейных колебаниях (математическая физика), движении тел с сопротивлением среды, сложных динамических системах (механика), при составлении нелинейных моделей роста, динамики рынков (экономика) и т.д.

Список литературы

1. Markakis M. P. Closed-form solutions of certain Abel equations of the first kind // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol. 22.
2. Markakis M. P. Exact solutions for certain nonlinear autonomous ordinary differential equations of the second order and families of two-dimensional autonomous systems // International Journal of Differential Equations. 2010.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 40–45, 119–125.
4. Полянкин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 2001. С. 93–101.
5. Ince E. L. Ordinary Differential Equations. N. Y.: Dover Publications, 1956. P. 140–144.