ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА: ОТ КОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ К ПУЛЬПОПРОВОДУ И НАСОСУ ГОРНО-ОБОГАТИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Марасулов Муроджон Сойибжон угли
Алмалыкский филиал НИТУ «МИСИС»
marasulov292@gmail.com

Annotatsiya. *Navye-Stoks tenglamalari aerokosmik sohada ham, tog‘-boyitish sanoatida ham hisoblash gidrodinamikasining (CFD) umumiy asosi sifatida ko‘rilgan. NASA ning ochiq materiallariga tayanib, u yerda qo‘llaniladigan RANS formulasi, k-ω SST modeli va ochiq OpenFOAM dasturi sanoatda ham qo‘llanishi mumkinligi ko‘rsatilgan. Ø530 mm pulpa quvuri va markazdan qochma pulpa nasosi uchun «effektiv suyuqlik» yaqinlashuvida hisoblar bajarilgan: to‘g‘ri quvur uchastkasidagi bosim yo‘qotilishi Kolbruk bo‘yicha hisobdan 9 % past, nasos napori 44,3 m (pasportda 47,0 m, -5,7 %). Nasos natijalari dastlabki.*

Kalit so‘zlar: *Navye–Stoks tenglamalari; CFD; OpenFOAM; k-ω SST; pulpa; markazdan qochma nasos; NASA.*

Аннотация. *Уравнения Навье-Стокса рассмотрены как общая основа вычислительной гидродинамики (CFD) в аэрокосмической отрасли и в горно-обогатительной промышленности. По открытым материалам NASA показано, что формулировка RANS, модель турбулентности k-ω SST и открытый код OpenFOAM применимы и к промышленным задачам. Для пульпопровода Ø530 мм и центробежного пульпового насоса выполнены расчёты в приближении однородной «эффективной жидкости»: потери давления на прямом участке трубы на 9 % ниже расчёта по Колбруку, напор насоса составил 44,3 м против паспортных 47,0 м (-5,7 %). Результаты по насосу предварительные (сходимость неполная).*

Ключевые слова: *уравнения Навье–Стокса; CFD; OpenFOAM; k-ω SST; пульпа; центробежный насос; NASA.*

Abstract. *The Navier-Stokes equations are considered as the common mathematical basis of computational fluid dynamics (CFD) in the aerospace industry and in mineral processing. Based on open NASA materials, it is shown that the RANS formulation, the k-ω SST turbulence model and the open-source OpenFOAM code used there can also be applied to industrial problems.*

Calculations for a Ø530 mm slurry pipeline and a centrifugal slurry pump were performed in the homogeneous "effective fluid" approximation: the pressure loss in the straight pipe section is 9 % lower than the Colebrook estimate, and the pump head is 44.3 m against the rated 47.0 m (-5.7 %). The pump results are preliminary (convergence incomplete).

Keywords: *Navier-Stokes equations; CFD; OpenFOAM; k-ω SST; slurry; centrifugal pump; NASA.*

ВВЕДЕНИЕ

Пульпопроводы и пульповые насосы наиболее нагруженные узлы обогатительной фабрики: они определяют расход электроэнергии на транспорт пульпы и первыми выходят из строя из-за абразивного износа. Их расчёт обычно опирается на справочные коэффициенты и паспортные характеристики [1], которые не показывают, что происходит внутри потока: где возникают зоны повышенной скорости, срыва потока и низкого давления.

Ответ на этот вопрос даёт вычислительная гидродинамика (CFD, Computational Fluid Dynamics). Её основа уравнения Навье-Стокса, описывающие законы сохранения массы и количества движения жидкости. В общем виде для сжимаемого течения они образуют систему из пяти связанных уравнений в частных производных (непрерывность, три компоненты импульса и энергия); для задач аэродинамики и гидравлики они решаются численно методами конечных разностей, объёмов, элементов или спектральными методами [2]. Те же уравнения описывают и поток пульпы в трубе и насосе.

Цель работы - показать, что подход и программные средства, которые NASA использует и оценивает для аэрокосмических задач, могут быть без изменения математической основы перенесены в горно-обогатительное производство, и проверить это на двух объектах: прямом участке пульпопровода Ø530 мм и центробежном пульповом насосе. Результаты сопоставляются с инженерной формулой и паспортными данными; отдельно обсуждаются ограничения подхода.

1. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА И ПОДХОД NASA

Для несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью уравнения Навье-Стокса записываются в виде [3]:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \tag{2}$$

где u - вектор скорости, м/с; t - время, с; p - давление, Па; ρ - плотность, кг/м^3; ν - кинематическая вязкость, м^2/с; g - вектор ускорения свободного падения, м/с^2.

Уравнение (1) выражает сохранение массы, уравнение (2) - сохранение количества движения. Приближение несжимаемости оправдано для пульпы: скорость потока (единицы метров в секунду) много меньше скорости звука.

Прямое решение (1)–(2) для турбулентных течений в трубах и насосах (числа Рейнольдса порядка 10^5–10^6) недоступно в инженерной практике из-за огромного числа ячеек сетки, поэтому применяют осреднённые по Рейнольдсу уравнения (RANS) с моделью турбулентности. NASA ведёт специальный ресурс Turbulence Modeling Resource, где собраны эталонные формулировки моделей и тестовые задачи для проверки программных кодов [4]. Среди таких моделей - k-ω SST Ментера [5], рассчитанная на течения с отрывом.

Показательно и отношение NASA к открытым программным средствам. Специалисты NASA Ames исследовали пригодность открытого кода OpenFOAM для расчёта обтекания спускаемых капсул: применили несколько RANS-моделей и сравнили результаты с эталонным кодом NASA OVERFLOW и с данными эксперимента, признав код перспективной альтернативой, но отметив вопросы вычислительной стоимости и устойчивости расчёта [6]. Таким образом, *методика* (RANS, k-ω SST), *проверка* (сравнение с эталоном и экспериментом) и *инструмент* (OpenFOAM) полностью совпадают с тем, что доступно горному предприятию без покупки лицензий (табл. 1).

Таблица 1 – Соответствие подхода NASA и его промышленного применения

Элемент	В материалах NASA	В данной работе
Уравнения	Навье–Стокса, RANS [2, 4]	Те же уравнения, пульпа как эффективная жидкость
Модель турбулентности	Модели из Turbulence Modeling Resource, в том числе SST [4]	k-ω SST [5]
Программный код	OpenFOAM проверен на задачах капсул [6]	OpenFOAM v1912 [7]
Проверка	Сравнение с OVERFLOW и экспериментом [6]	Сравнение с формулой Колбрука и паспортом насоса

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Пульпа как эффективная жидкость

На данном этапе твёрдая фаза не моделируется отдельно: пульпа рассматривается как однородная ньютоновская жидкость с эффективной плотностью

$$\rho_{\text{п}} = \rho_{\text{ж}}\,(1 - \varphi_{\text{тв}}) + \rho_{\text{тв}}\,\varphi_{\text{тв}} \tag{3}$$

где $\rho_{\text{п}}$ - плотность пульпы, кг/м^3; $\rho_{\text{ж}}$ - плотность жидкой фазы, кг/м^3; $\rho_{\text{тв}}$ - плотность твёрдой фазы, кг/м^3; $\varphi_{\text{тв}}$ - объёмная доля твёрдого.

По паспортной плотности пульпы $\rho_{\text{п}}$ = 1530 кг/м^3, при $\rho_{\text{ж}}$ = 1000 кг/м^3 и принятой $\rho_{\text{тв}}$ = 2700 кг/м^3 из (3) получается $\varphi_{\text{тв}} \approx 0{,}31$. Значение $\rho_{\text{тв}}$ в паспорте отсутствует и принято по типичной плотности руды (допущение). Вязкость пульпы оценена по формуле Томаса [8] и составила около 3,25 мПа·с (также допущение). Далее в уравнениях $\rho \equiv \rho_{\text{п}}$, $\nu = \mu_{\text{п}}/\rho_{\text{п}}$, где $\mu_{\text{п}}$ - динамическая вязкость пульпы.

2.2. Осреднённые уравнения и модель k–ω SST

После осреднения по Рейнольдсу и применения гипотезы Буссинеска для установившегося течения уравнение импульса принимает вид

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho}\nabla\bar{p} + \nabla \cdot \left[(\nu + \nu_{\text{т}})\left(\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^{\text{T}}\right)\right] \tag{4}$$

$$\nu_{\text{т}} = \frac{a_1\, k}{\max\,(a_1\,\omega,\; S\,F_2)} \tag{5}$$

где черта сверху обозначает осреднённую величину; $\nu_{\text{т}}$ - турбулентная вязкость, м^2/с; k - кинетическая энергия турбулентности, м^2/с^2; ω - удельная скорость диссипации, 1/с; S - модуль тензора скоростей деформации, 1/с; F_2 - блендинг-функция; a_1 = 0,31 - константа модели [5]; индекс «T» - транспонирование.

Для вычисления k и ω решаются два дополнительных уравнения переноса [5]:

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)k = P_k - \beta^{*}\,k\,\omega + \nabla \cdot [(\nu + \sigma_k \nu_{\text{т}})\nabla k] \tag{6}$$

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\omega = \gamma S^2 - \beta\,\omega^2 + \nabla \cdot [(\nu + \sigma_\omega \nu_{\text{т}})\nabla\omega] + 2\,(1 - F_1)\,\frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega}\,\nabla k \cdot \nabla\omega \tag{7}$$

где P_{k} - генерация турбулентной энергии, м^2/с^3; β^*, β, γ, σ_{k}, σ_ω, $\sigma_{\omega 2}$ - коэффициенты модели, плавно переключаемые между значениями k–ω и k–ε функцией F_1 [5]. Модель k–ω SST выбрана потому, что она одинаково применима у стенки и в ядре потока и сохраняет работоспособность при отрыве, характерном для рабочего колеса насоса.

2.3. Вращающееся рабочее колесо

Для насоса уравнения решаются во вращающейся системе координат, связанной с рабочим колесом (метод MRF – Multiple Reference Frame). В ней появляются кориолисова и центробежная силы:

$$(\mathbf{u}_r \cdot \nabla)\mathbf{u}_r + 2\,\boldsymbol{\Omega}_{\text{вр}} \times \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega}_{\text{вр}} \times (\boldsymbol{\Omega}_{\text{вр}} \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (8)$$

где u_r - скорость относительно вращающейся системы, м/с; $\Omega_{\text{вр}}$ - вектор угловой скорости колеса, рад/с; r - радиус-вектор точки, м; $\tau = (\nu + \nu_т)(\nabla u_r + (\nabla u_r)^T)$ - эффективный тензор напряжений, м^2/с^2. Для колеса частотой вращения 367 об/мин $\Omega_{\text{вр}}$ = 38,43 рад/с. Метод MRF даёт осреднённое поле, достаточное для оценки напора, но не описывает пульсации при прохождении лопатки мимо языка улитки.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ОБЪЕКТЫ РАСЧЁТА

Уравнения решались методом конечных объёмов с алгоритмом связи скорости и давления SIMPLE [9] в стационарном решателе simpleFoam пакета OpenFOAM v1912 [7]. Открытый код выбран не только из-за отсутствия лицензии: его можно дорабатывать для следующего этапа - связи с расчётом частиц. Последовательность работ показана на рис. 1.



Рисунок 1 - Последовательность расчёта: от исходных данных до проверки результата

Объект 1 - прямой участок пульпопровода длиной 40 диаметров. Использована осесимметричная расчётная область в виде клина 5° (13 600 ячеек), первая ячейка у стенки подобрана так, чтобы безразмерное расстояние $y^+ \approx 57$, что соответствует применению пристенных функций. *Объект 2* – центробежный пульповый насос Warman: геометрия проточной части построена по чертежу из паспорта [10]; форма лопаток и сечение улитки паспортом не заданы и восстановлены приближённо (допущение). Сетка - 416 461 ячейка. Исходные данные и допущения приведены в табл. 2.

Таблица 2 - Исходные данные расчётов

Параметр	Труба	Насос	Источник
Подача, м^3/ч	3017	3017	паспорт [10]

Плотность пульпы, кг/м^3	1530	1530	паспорт [10]
Вязкость пульпы, мПа·с	5,0	≈ 3,25	допущение; формула Томаса [8]
Диаметр / частота вращения	0,53 м	367 об/мин	паспорт [10]
Число ячеек	13 600	416 461	построение сетки

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

4.1. Проверка на прямом участке трубы

Для проверки решателя выбрана задача с известным инженерным решением. Потери давления по длине трубы оцениваются по формуле Дарси–Вейсбаха [1]

$$\frac{\Delta p}{L} = \lambda \frac{\rho_{\text{п}}\, u_{\text{ср}}^2}{2\, D} \tag{9}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{\text{п}}\, u_{\text{ср}}\, D}{\mu_{\text{п}}} \tag{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg\left(\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) \tag{11}$$

где Δp - потери давления на участке, Па; L - длина участка, м; D - внутренний диаметр трубы, м; $u_{\text{ср}}$ - средняя скорость, м/с; λ - коэффициент гидравлического трения; Re - число Рейнольдса. Уравнение (11) - формула Колбрука для гладкой трубы [11]. При $u_{\text{ср}}$ = 3,80 м/с получено Re = $6{,}16 \cdot 10^5$, λ = 0,0127 и $\Delta p/L$ = 264 Па/м.

В расчёте на участке полностью развитого течения получено $\Delta p/L$ = 240 Па/м (λ = 0,0115), то есть на 9 % ниже расчёта по Колбруку. Расчёт и формула (11) выполнены при одной и той же принятой вязкости 5 мПа·с, поэтому сравнение отражает качество решателя, а не точность знания вязкости пульпы; занижение потерь на 5-10 % для RANS с пристенными функциями – типичное явление.

4.2. Центробежный насос

Напор насоса определяется по полному давлению на входе и выходе:

$$H = \frac{p_{\text{полн, вых}} - p_{\text{полн, вх}}}{\rho_{\text{п}}\, g} \tag{12}$$

где H - напор, м; $p_{\text{полн,вых}}$, $p_{\text{полн,вх}}$ - полное давление на выходе и входе, Па; g - ускорение свободного падения, м/с^2.

Невязка по массе между входом и выходом составила менее 0,01 %, расход через стенки корпуса отсутствует. Расчётный напор H = 44,3 м при паспортных 47,0 м для пульпы, то есть отклонение составило -5,7 %. Гидравлическая мощность $\rho_п gQH$ при подаче Q = 0,838 м^3/с составляет около 0,56 МВт. Поля скорости и давления показаны на рис. 2: перед входом в колесо возникает область низкого давления, давление нарастает в каналах и улитке, а повышенные скорости наблюдаются у выхода колеса вблизи языка улитки. Объёмная картина линий тока (рис. 3) и вид со стороны всасывания (рис. 4) получены на более мелкой сетке (487 282 ячейки) и служат качественной иллюстрацией: скорость возрастает от нескольких метров в секунду на всасывании до 28 м/с на периферии колеса, а в нагнетательном патрубке Ø457 мм составляет около 5 м/с (по подаче 3017 м^3/ч и площади сечения). Количественные сравнения в этой работе относятся к варианту с 416 461 ячейкой.

Отклонения 6-9 % приемлемы для предварительной оценки, но не для окончательных выводов: у насоса невязки по давлению оставались на уровне 10^{-3}-10^{-2}, а напор ещё возрастал (43,6 м на 1500-й и 44,3 м на 3000-й итерации), поэтому значение следует считать нижней оценкой.

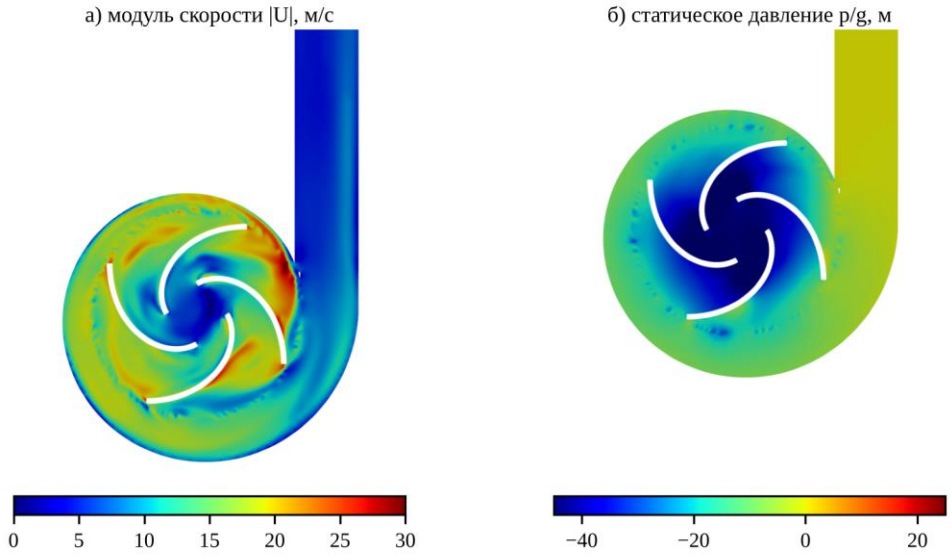


Рисунок 2 - Результат расчёта насоса: модуль скорости (а) и статическое давление (б); сечение через рабочее колесо, вид со стороны всасывания, нагнетательный патрубок вверху

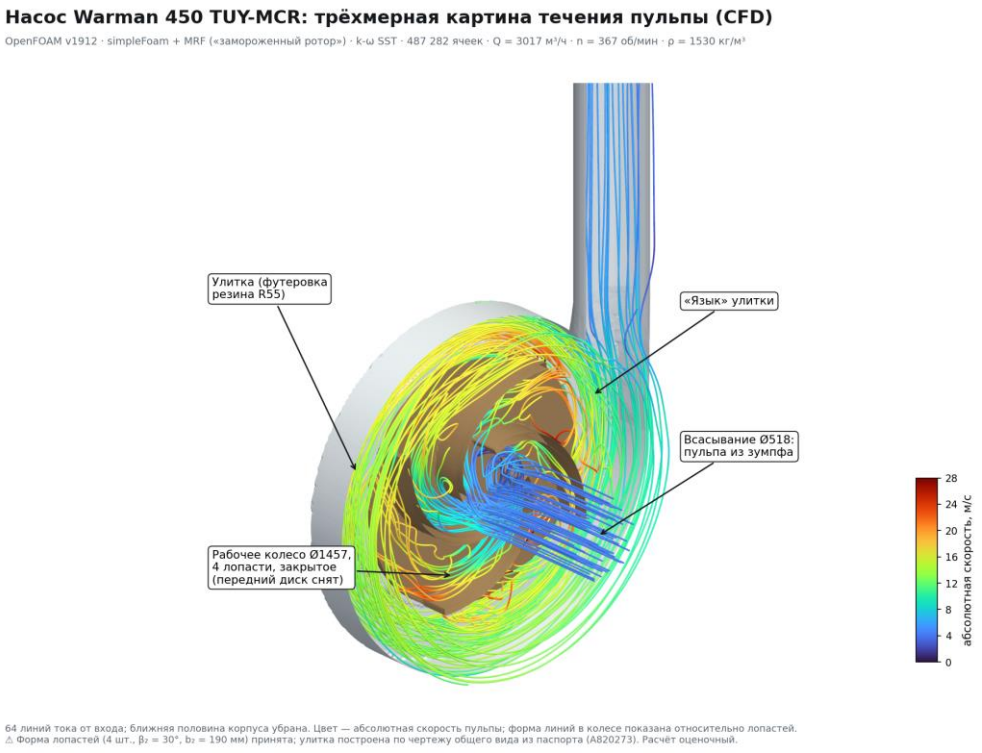


Рисунок 3 - Насос Warman 450 TUY-MCR: линии тока пульпы (объёмный вид; форма лопастей принята, расчёт оценочный)

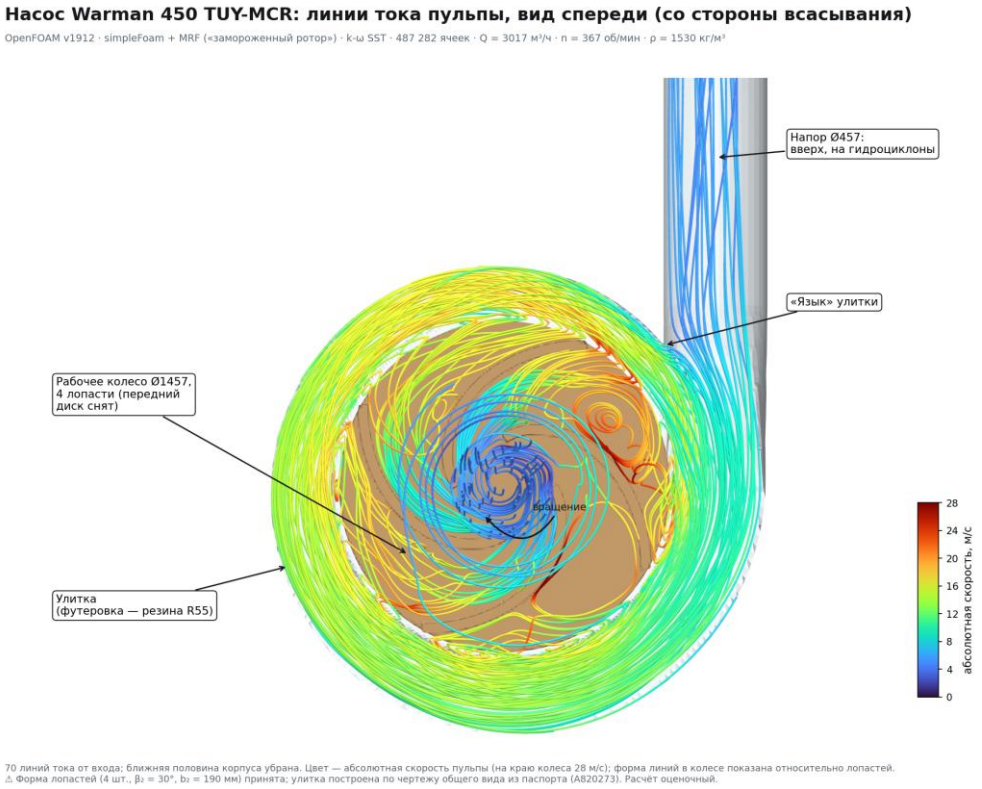


Рисунок 4 – Насос Warman 450 TUY-MCR: линии тока, вид со стороны всасывания (форма лопастей принята, расчёт оценочный)

5. ОГРАНИЧЕНИЯ И СЛЕДУЮЩИЙ ЭТАП

Главное ограничение подхода «эффективной жидкости» - отсутствие твёрдых частиц: он не показывает, куда и под каким углом частицы ударяют в

стенку, а значит, не даёт износа. Кроме того, вязкость и плотность твёрдого приняты, форма проточной части насоса восстановлена приближённо, а расчёт гидроциклона тем же методом из-за обратных токов на выходах (13-14 %) пока недостоверен и в работе не используется; рис. 5 показывает лишь качественную картину закрутки потока.

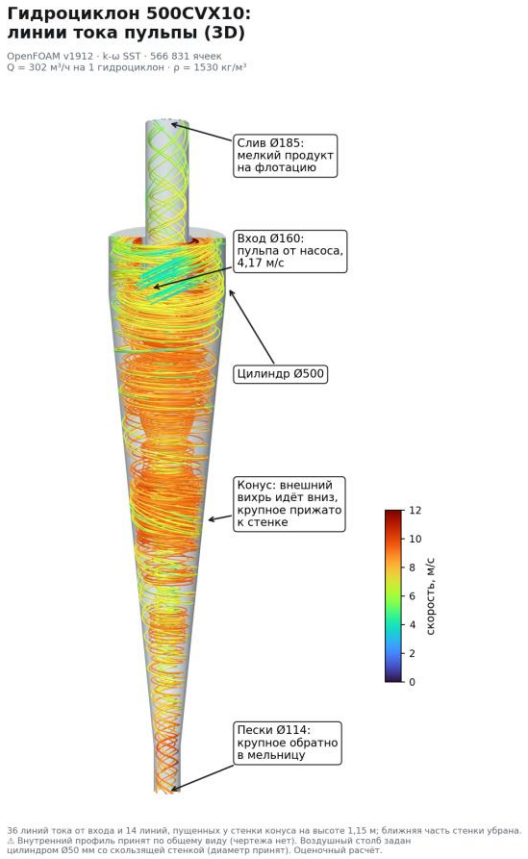


Рисунок 5 - Гидроциклон 500CVX10: линии тока пульпы (качественная картина; количественные показатели не используются)

Следующий этап - связать поля скоростей, полученные из уравнений Навье-Стокса, с методом дискретных элементов (DEM), где каждая частица описывается как отдельное тело. Это направление также развивается в NASA: для моделирования заряженной лунной пыли в Космическом центре Кеннеди расширен открытый код LIGGGHTS [12]. Связка CFD–DEM рассматривается во второй части исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Уравнения Навье-Стокса, формулировка RANS, модель k-ω SST и открытый код OpenFOAM, которые рассматриваются в материалах NASA для аэрокосмических задач, применимы к потоку пульпы в трубе и насосе без изменения математической основы.

2. Для прямого участка пульпопровода Ø530 мм потери давления на 9 % ниже расчёта по формуле Колбрука; для насоса расчётный напор 44,3 м против паспортных 47,0 м (-5,7 %).

3. Результаты по насосу предварительны (сходимость не завершена, ряд параметров принят); для расчёта износа необходим переход к CFD-DEM.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / под ред. М.О. Штейнберга. – 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.

2. Navier–Stokes Equations [Электронный ресурс] / NASA Glenn Research Center. - URL: https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/nseqs.html (дата обращения: 06.10.2026).

3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. - 840 с.

4. Turbulence Modeling Resource [Электронный ресурс] / NASA Langley Research Center, Turbulence Model Benchmarking Working Group. - URL: https://tmbwg.github.io/turbmodels/ (дата обращения: 06.10.2026).

5. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. - 1994. - Vol. 32, No. 8. - P. 1598-1605.

6. Nikaido B.E., Murman S.M., Garcia J.A. OpenFOAM Simulations of Atmospheric-Entry Capsules in the Subsonic Regime // 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting. - Kissimmee, FL, 2015. - Paper AIAA 2015-0313. - DOI: 10.2514/6.2015-0313.

7. Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // Computers in Physics. - 1998. - Vol. 12, No. 6. - P. 620-631.

8. Thomas D.G. Transport characteristics of suspension: VIII. A note on the viscosity of Newtonian suspensions of uniform spherical particles // Journal of Colloid Science. - 1965. -Vol. 20, No. 3. - P. 267-277.

9. Patankar S.V., Spalding D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1972. - Vol. 15, No. 10. - P. 1787-1806.

10. Технический паспорт центробежного пульпового насоса Warman, чертёж A820273, rev. 3 [Текст]. - Документ предприятия, не опубликован.

11. Colebrook C.F. Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws // Journal of the Institution of Civil Engineers. - 1939. -Vol. 11, No. 4. - P. 133-156.

12. Phillips J.R. III, Wang H., Hillegass A., Esparza A., Dove A.R., Elgohary T.A. Implementation of Charged Particle Behavior in Discrete Element Method

(DEM) Simulations. - NASA Kennedy Space Center, 2021. - NTRS 20210012780. - URL: https://ntrs.nasa.gov/citations/20210012780 (дата обращения: 06.10.2026).