KOMPLEKS SON VA ULAR USTIDA AMALLARNI O‘QITISH METODIKASI

Omonova Nargiza Raximovna
Qarshi davlat texnika universiteti
omonovanargiza92@gmail.com

Annotatsiya. *Mazkur maqolada “Kompleks sonlar” mavzusini, xususan, kompleks son tushunchasi, uning berilish usullari va kompleks sonlar ustida amallarni o‘qitish metodikasi yoritiladi. Mavzuni o‘rganishda haqiqiy sonlar to‘plamidan kompleks sonlar to‘plamiga o‘tish zarurati,* $i^2 = -1$ *tenglikning mazmuni, algebraik* $(a+ib)$*, juftlik* (a,b)*, geometrik (kompleks tekislik), trigonometrik va ko‘rsatkichli ko‘rinishlar o‘zaro bog‘liq holda bayon etiladi. Qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, qo‘shma kompleks son, modul va argument tushunchalarini bosqichma-bosqich shakllantirish, tipik xatolarni bartaraf etish, muammoli ta’lim, ko‘rgazmalilik, amaliy va mustaqil topshiriqlarni tashkil etish bo‘yicha metodik tavsiyalar ishlab chiqilgan. Kompleks sonni faqat formal algebraik obyekt sifatida emas, balki geometrik va operator mazmuni bilan ham tushuntirish talabaning mavzuni chuqurroq o‘zlashtirishiga xizmat qilishi asoslanadi.*

Kalit so‘zlar: *kompleks son, mavhum birlik, algebraik ko‘rinish, geometrik ko‘rinish, kompleks tekislik, trigonometrik ko‘rinish, ko‘rsatkichli ko‘rinish, modul, argument, qo‘shma kompleks son, amallar, matematik analiz, oliy matematika.*

Abstract. *This article outlines the methodology for teaching the topic of "Complex Numbers," specifically covering the concept of complex numbers, their representations, and operations performed on them. The study of the topic addresses the transition from the set of real numbers to the set of complex numbers and the significance of the equality* $i^2 = -1$ *, while presenting the algebraic* $(a+ib)$*, ordered pair* (a,b)*, geometric (complex plane), trigonometric, and exponential forms in an interconnected manner. Methodological recommendations are developed for the step-by-step formation of concepts such as addition, subtraction, multiplication, division, complex conjugates, modulus, and argument, as well as for addressing common errors and implementing problem-based learning, visual aids, and practical or independent assignments. The article argues that explaining complex numbers not merely as formal algebraic objects but also through their geometric*

and operator interpretations facilitates a deeper understanding of the subject by students.

Keywords: *complex number, imaginary unit, algebraic form, geometric form, complex plane, trigonometric form, exponential form, modulus, argument, complex conjugate, operations, mathematical analysis, higher mathematics.*

Аннотация. *В статье изложена методика преподавания темы «Комплексные числа», охватывающая понятие комплексного числа, способы его представления и операции над ними. Рассматривается переход от множества действительных чисел к множеству комплексных чисел и значение равенства* $i^2 = -1$, *при этом во взаимосвязи представлены алгебраическая форма* $(a + ib)$, *запись в виде упорядоченной пары* (a,b), *а также геометрическая (комплексная плоскость), тригонометрическая и показательная формы. Разработаны методические рекомендации по поэтапному формированию понятий сложения, вычитания, умножения, деления, комплексно-сопряженного числа, модуля и аргумента, а также по работе с типичными ошибками и применению методов проблемного обучения, наглядных пособий и практических или самостоятельных заданий. Обосновывается тезис о том, что объяснение комплексных чисел не только как формальных алгебраических объектов, но и через их геометрическую и операторную интерпретации способствует более глубокому пониманию предмета учащимися.*

Ключевые слова: *комплексное число, мнимая единица, алгебраическая форма, геометрическая форма, комплексная плоскость, тригонометрическая форма, показательная форма, модуль, аргумент, комплексно-сопряженное число, операции, математический анализ, высшая математика.*

Kirish

Kompleks sonlar matematikadagi son tushunchasining tabiiy kengaytmasi bo‘lib, algebra, matematik analiz, differensial tenglamalar, signal va tizimlar nazariyasi hamda boshqa ko‘plab fanlarda qo‘llanadi. Oliy ta’limda bu mavzuni o‘qitishning asosiy qiyinchiligi shundaki, talaba avval real sonlar haqidagi shakllangan tasavvurini kengaytirishi kerak. Tadqiqotlarda real sonlardan kompleks sonlarga o‘tish oddiy yangi formula yodlash emas, balki sonlar haqidagi matematik diskursning o‘zgarishini talab qiluvchi konseptual o‘tish sifatida tavsiflangan.

Kompleks sonlarni o‘qitishda faqat algebraik hisoblashga tayanish mavzuning geometrik mazmunini cheklab qo‘yishi mumkin. Kompleks sonlarning geometrik

talqini ularning matematikada qabul qilinishida muhim rol o‘ynagan va bir nechta tasvirlash usullarini qo‘llash tushunchani boyitishi mumkin.

Maqolaning maqsadi —kompleks son tushunchasini ilmiy jihatdan to‘g‘ri, metodik jihatdan izchil va amaliy misollar bilan bog‘langan holda kiritish, kompleks sonning turli berilish usullarini o‘zaro bog‘lash hamda ular ustida amallarni ongli o‘rgatish metodikasini ishlab chiqish.

Kompleks son tushunchasini kiritishning metodik asoslari

Mavzuni boshlashda $x^2+1=0$ tenglamasining haqiqiy sonlar to‘plamida yechimi yo‘qligi muammoli vaziyat sifatida qo‘yiladi. Talabaga “Algebraik tenglamalar yechimga ega bo‘lishi uchun sonlar to‘plamini qanday kengaytirish mumkin?” degan savol beriladi. Shu muammo orqali yangi son tushunchasiga ehtiyoj shakllantiriladi.

Mavhum birlik i shunday son sifatida kiritiladiki, $i^2=-1$. Shunda kompleks son $z=a+ib$ ko‘rinishida aniqlanadi, bunda $a,b\in R$ a,b∈R. Bu yerda a — haqiqiy qism, b — mavhum qism koeffitsienti. $z=a+ib$ va $w=c+id$ kompleks sonlar teng bo‘lishi uchun a=c va b=d bo‘lishi kerak.

Pedagogik nuqtai nazardan $i=\sqrt{(-1)}$ yozuvini boshlang‘ich ta’rif sifatida mexanik berishdan ko‘ra $i^2=-1$ munosabatini asosiy obyekt sifatida kiritish aniqroq bo‘lishi mumkin.

Kompleks sonning algebraik va juftlik ko‘rinishlari

Kompleks sonning algebraik ko‘rinishi $z=a+ib$ oliy matematika kursida asosiy hisoblash shaklidir. Bu ko‘rinishda qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallari odatdagi algebraik qoidalar asosida bajariladi, faqat $i^2=-1$ tenglikdan foydalaniladi.

Kompleks sonni (a,b)tartibli juftlik sifatida qarash ham metodik jihatdan muhim. Bunda qo‘shish $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, ko‘paytirish esa $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ ko‘rinishida beriladi. Shu yo‘l bilan kompleks sonni “sirli yangi son” emas, balki real sonlar juftligidan tuzilgan matematik obyekt sifatida tushuntirish mumkin.

Juftlik va algebraik ko‘rinishning ekvivalentligini ko‘rsatish talabaning mavhum tushunchani konkretlashtirishiga yordam beradi. Bunda $(a,0)$ juftlik real a soniga, $(0,1)$ esa i ga mos qo‘yiladi. Natijada $i^2=-1$ tenglik juftliklar ustidagi ko‘paytirish qoidasi bilan ham asoslanadi.

Kompleks sonning geometrik berilishi

Kompleks son $z=a+ib$ ni koordinatalar tekisligidagi $M(a,b)$ nuqta yoki OM vektor bilan tasvirlash mumkin. Gorizontal o‘q haqiqiy o‘q, vertikal o‘q mavhum

o‘q deb ataladi. Bu tasvir kompleks sonni ikki o‘lchovli geometrik obyekt sifatida ko‘rish imkonini beradi.

Geometrik tasvirni o‘qitishda birinchi navbatda oddiy misollar olinadi: $2+3i$ nuqta $(2,3)$, $-1+2i$ nuqta $(-1,2)$, $3-i$ nuqta $(3,-1)$ bilan tasvirlanadi. Keyin qo‘shish va ayirish amallarining vektoriy mazmuni ko‘rsatiladi.

Shuningdek, kompleks sonlarni turli tasvirlarda berish o‘quvchiga bir xil matematik obyektning turli xususiyatlarini ko‘rish imkonini beradi. Shu sababli algebraik ifodani grafik nuqta bilan, modulni masofa bilan, argumentni esa musbat haqiqiy o‘q bilan hosil qiladigan burchak bilan bog‘lash tavsiya etiladi.

Trigonometrik va ko‘rsatkichli ko‘rinish

$z=a+ib$ kompleks son uchun $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ modul va $\varphi=\arg z$ argument kiritilgach $a=r\cos\varphi, b=r\sin\varphi$ bo‘ladi. Demak, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ trigonometrik ko‘rinishga ega. Eyler formulasi orqali $z=re^{i\varphi}$ ko‘rsatkichli ko‘rinishga o‘tiladi.

Metodik jihatdan trigonometrik ko‘rinish algebraik shakldan keyin kiritilib, uning afzalligi ko‘paytirish va bo‘lishda ko‘rsatilishi kerak. Masalan, $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ va $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ bo‘lsa, $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$. Bu formula kompleks sonlarni ko‘paytirishning geometrik ma’nosini, modulning ko‘payishi va argumentlarning qo‘shilishini ochib beradi.

O‘qituvchi talabalardan bir kompleks sonni uch xil shaklda yozishni talab qilishi mumkin: algebraik, trigonometrik va ko‘rsatkichli. Bunday topshiriq shakllar o‘rtasida o‘tish ko‘nikmasini rivojlantiradi.

Kompleks sonlar ustida qo‘shish va ayirish amallarini o‘rgatish

$z_1=a+ib$ va $z_1=c+id$ bo‘lsa, $z_1+z_2=(a+c)+i(b+d)$, $z_1-z_2=(a-c)+i(b-d)$. Bu amallarni o‘qitishda haqiqiy va mavhum qismlarni alohida guruhlash tamoyili asos qilib olinadi.

Masalan, $(3+2i)+(-1+5i)=2+7i$. Talaba hisoblashdan oldin “haqiqiy qismlar alohida, i koeffitsientlari alohida qo‘shiladi” qoidasini aytishi kerak. Geometrik talqinda esa qo‘shish vektorlarni qo‘shishga mos kelishi ko‘rsatiladi.

Metodik jihatdan “xatoni toping” topshiriqlari foydali: $(2+3i)+(4-3i)=6$ deb yozilgan bo‘lsa, talaba natijani tekshiradi va 3i−3i=0 ekanini asoslaydi. Shu bilan birga, kompleks sonlar ustidagi amallar real sonlar algebra qoidalarining izchil kengaytmasi ekanligi ta’kidlanadi.

Ko‘paytirish va bo‘lish amallarini o‘rgatish

Ko‘paytirishda $z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + adi + bci - bd$ formulasi hosil qilinadi. Eng muhim metodik nuqta $i^2 = -1$ ni o‘z vaqtida qo‘llashdir.

Masalan, $(2+3i)(1-i) = 2-2i+3i-3i^2 = 5+i$. Hisoblashning har bir bosqichi yozdirilishi talabaga formulani yodlashdan ko‘ra uning qanday hosil bo‘lishini tushunishga yordam beradi.

Bo‘lish amalida maxrajni haqiqiy songa keltirish uchun qo‘shma kompleks sondan foydalaniladi. $\frac{z_1}{z_2}$ kasrida $z_2 = a+ib$ bo‘lsa, surat va maxraj $z_2 = a-ib$ ga ko‘paytiriladi. Chunki $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$. Masalan, $\frac{1+2i}{3+i}$ ifodasida maxrajni 10 ga keltirib, natija $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ekanini olish mumkin. Bu usul qo‘shma kompleks sonning algebraik mohiyatini amaliy tarzda ko‘rsatadi.

Qo‘shma kompleks son, modul va argument

$z = a+ib$ kompleks sonining qo‘shmasi $\bar{z} = a-ib$ ko‘rinishida aniqlanadi. Uning muhim xossalari $z\bar{z} = |z|^2 = a^2+b^2$ va $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ushbu munosabatlar bo‘lish amalini o‘rgatishda ham, geometrik talqinda ham tayanch bo‘ladi.

Argumentni o‘rgatishda faqat $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ formulasini yodlatish yetarli emas, chunki nuqtaning qaysi chorakda joylashgani hisobga olinadi. Shu sababli Argand tekisligida ya’ni kompleks tekislikda kompleks sonning koordinatalarini belgilash va argument burchagini aniqlash birgalikda bajarilishi kerak.

Cambridge Internationalning kompleks sonlar bo‘yicha o‘quv resurslarida ham algebraik amallar bilan bir qatorda Argand diagrammasi, modul, argument, qo‘shma son va trigonometrik shakldagi ko‘paytirish-bo‘lishni bir tizimda o‘rganish ko‘zda tutilgan. Ma’lumot uchun keltirib o‘tamiz: **Argand diagrammasi** (yoki Argand tekisligi) — bu **kompleks sonlarni geometrik shaklda tasvirlash uchun ishlatiladigan koordinatalar tizimi** hisoblanadi. Argand diagrammasi yordamida kompleks sonlar ustida bajariladigan amallarni ko‘z bilan ko‘rib, tushunish osonlashadi. Bu diagramma 1806-yilda havaskor matematik **Jan Robert Argan** (Jean-Robert Argand) tomonidan taklif etilgan va uning nomi bilan ataladi.

Muammoli va masalalar asosida o‘qitish

Kompleks sonlarni kiritishda muammoli ta’lim ayniqsa qulay. Masalan, “ $x^2+1=0$ tenglama haqiqiy sonlarda yechimga ega emas. Tenglamaning yechimini qanday sonlar to‘plamida topish mumkin?” savoli orqali yangi sonlar tizimiga

ehtiyoj hosil qilinadi. Keyin kompleks sonning berilish usullari muammoni yechishning turli vositalari sifatida ko‘rsatiladi.

Masalalar asosida o‘qitishning yana bir ko‘rinishi — bitta masalani turli ko‘rinishda yechish. Masalan, kompleks sonlarni ko‘paytirishni algebraik usulda hisoblash, so‘ng trigonometrik ko‘rinishda modul va argumentlarning o‘zgarishi orqali izohlash. Kompleks sonlarni muammoli vaziyatlar orqali o‘rgatish natijani umumlashtirishtiradi va matematik fikrlashni kuchaytiradi.

Tipik xatolar va ularni bartaraf etish

Talabalarda quyidagi xatolar ko‘p uchrashi mumkin: $i^2 = -1$ o‘rniga $i^2 = 1$ deb olish; i ni oddiy o‘zgaruvchi sifatida talqin qilish; $a + ib$ ifodasida b ni mavhum qismning o‘zi deb tushunish; bo‘lishda qo‘shma sonni noto‘g‘ri tanlash; argumentni aniqlashda chorakni hisobga olmaslik; trigonometrik shaklda burchaklarni qo‘shish va ayirish qoidalarini noto‘g‘ri qo‘llash.

Xatolarni bartaraf etishda qarama-qarshi misollar va izohli topshiriqlar berish tavsiya etiladi. Masalan, “$\sqrt{(-9)} = 3i$” tengligini qaysi ma’noda tushunish mumkinligini muhokama qilish, yoki “$z = a + ib$ va $\bar{z} = a - ib$ bo‘lsa, $z\bar{z}$ haqiqiy son ekanini isbotlang” kabi topshiriqlar talabaning formuladan foydalanish sababini anglashiga yordam beradi.

Ma’ruza, amaliy mashg‘ulot va mustaqil ta’lim modeli

Mavzuni quyidagi izchillikda tashkil etish mumkin: 1) muammoli tenglama $x^2 + 1 = 0$; 2) $i^2 = -1$ va $z = a + ib$ tushunchasi; 3) algebraik va juftlik ko‘rinishi; 4) kompleks tekislik; 5) qo‘shish va ayirish; 6) ko‘paytirish; 7) qo‘shma son va bo‘lish; 8) modul va argument; 9) trigonometrik va ko‘rsatkichli ko‘rinish; 10) amallarni turli ko‘rinishlarda bajarish; 11) amaliy va mustaqil topshiriqlar.

Ma’ruzaning asosiy vazifasi tushunchalar tizimini shakllantirish, amaliy mashg‘ulotning vazifasi algoritmlarni qo‘llash va izohlash, mustaqil ta’limning vazifasi esa bilimlarni yangi vaziyatlarga ko‘chirishdan iborat. Kompleks sonlar mavzusida tarixiy ma’lumotlardan foydalanish ham talabalar qiziqishi, mustaqil fikrlashi va mavzuning rivojlanish mantiqini tushunishiga xizmat qiladi.

Baholash va namunaviy topshiriqlar

Baholashni uch darajada tashkil etish mumkin. Birinchi daraja — kompleks sonni algebraik va geometrik ko‘rinishda aniqlash hamda oddiy amallarni bajarish. Ikkinchi daraja — qo‘shma son, modul, argument va turli ko‘rinishlar o‘rtasida o‘tish. Uchinchi daraja — kompleks sonlarning geometrik ma’nosini asoslash, murakkab hisoblashni qulay ko‘rinishga o‘tkazish va real matematik masalalarda qo‘llash.

Namunaviy topshiriqlar: 1) $z_1 = 3 - 7i$ va $z_2 = 5 + 3i$ uchun $z_1 + z_2$ va $z_1 - z_2$ ni toping; 2) $(2 + 4i)(5 - 3i)$ ni hisoblang; 3) $(1 + 2i)(2 - i)$ ni algebraik ko‘rinishga keltiring; 4) $z = -1 + \sqrt{3}i$ kompleks sonni trigonometrik ko‘rinishda yozing; 5) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ z=2(cosπ/3+i sinπ/3) sonini algebraik shaklga o‘tkazing; 6) kompleks tekislikda z va $\bar{z}$ ni tasvirlab, ularning geometrik munosabatini izohlang.

Metodik tavsiyalar

Birinchidan, kompleks sonni “yangi va tushunarsiz son” sifatida emas, real sonlar tizimining algebraik kengaytmasi sifatida tushuntirish lozim. Ikkinchidan, $i^2 = -1$ tengligini asosiy boshlang‘ich munosabat sifatida ishlatish maqsadga muvofiq. Uchinchidan, algebraik va geometrik tasvirlarni muntazam almashtirib borish kerak. To‘rtinchidan, amallarni o‘rgatishda faqat natijani emas, oraliq algebraik qadamlarni izohlash talab qilinadi.

Beshinchidan, trigonometrik va ko‘rsatkichli ko‘rinishlar faqat qo‘shimcha formula sifatida emas, ko‘paytirish va bo‘lishni soddalashtiruvchi hamda geometrik mazmunni ochuvchi vosita sifatida ko‘rsatilishi kerak. Oltinchidan, har bir yangi tushuncha uchun kamida bitta “nima uchun?” va bitta “geometrik ma’nosi nima?” savoli berilishi talabaning formalizmga berilib ketishining oldini oladi. Kompleks sonlarni turli tasvirlarda o‘qitish algebraik va geometrik kontekstlarni uyg‘unlashtirishning ahamiyatini ko‘rsatadi.

Xulosa

Kompleks son va uning berilish usullarini, shuningdek kompleks sonlar ustida amallarni o‘qitish amaliy matematikaning muhim metodik masalalaridan biridir. Mavzuni $z^2 + 1 = 0$ muammosidan boshlash, $i^2 = -1$ orqali yangi son tushunchasini kiritish, so‘ng algebraik, juftlik, geometrik, trigonometrik va ko‘rsatkichli ko‘rinishlarni o‘zaro bog‘lash talabaning kompleks son haqidagi yaxlit tasavvurini shakllantiradi.

Qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lishni bosqichma-bosqich o‘rgatish, qo‘shma son, modul va argumentni geometrik mazmun bilan birlashtirish, muammoli masalalar va xatolar tahlilidan foydalanish mavzuning ongli o‘zlashtirilishiga yordam beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Grosholz E. R. Teaching the Complex Numbers: What History and Philosophy of Mathematics Suggest // Journal of Humanistic Mathematics. – 2013. – Vol. 3, No. 1. – P. 62–73. – DOI: 10.5642/jhummath.201301.06.

2. Nachlieli T., Elbaum-Cohen A. Teaching practices aimed at promoting meta-level learning: The case of complex numbers // The Journal of Mathematical Behavior. – 2021. – Vol. 62. – Article 100872. – DOI: 10.1016/j.jmathb.2021.100872.

3. Toh T. L. Teaching and Learning Complex Numbers through Problem Solving // The Mathematician Educator. – 2022. – Vol. 3, No. 1. – P. 62–74.

4. Veith J. M., Bitzenbauer P. Two Challenging Concepts in Mathematics Education: Subject-Specific Thoughts on the Complex Unit and Angles // European Journal of Science and Mathematics Education. – 2021. – Vol. 9, No. 4.

5. Ummatova M. A., Tokhtabayeva M. M. In teaching the subject of complex numbers and operations on them use of historical data // International Journal on Integrated Education. – 2023. – Vol. 6, No. 12. – P. 245–248. – DOI: 10.31149/ijie.v6i12.5130.

6. Akoğlu K. Teacher's conceptualizations of different meanings of pure imaginary numbers // Education and Science. – 2025. – Vol. 50, No. 223. – P. 199–222. – DOI: 10.15390/ES.2025.2570.

7. Harel G. DNR-Based Curricula: The Case of Complex Numbers // Journal of Humanistic Mathematics. – 2013. – Vol. 3, No. 2. – P. 2–61. – DOI: 10.5642/jhummath.201302.03.